Raisonnements mathématiques
Corrigé (incomplet) TD n°2

Novembre 2016

Exercice 8

(b) Étant données A et B des parties de E, on cherche les parties X de E vérifiant l'équation

$$A \cap X = B. \tag{E}$$

— Supposons que X vérifie (E). Remarquons déjà que si un tel X existe, nécessairement $B \subseteq A$. En effet, $B = A \cap X$, donc $B \subseteq A \cap X \subseteq A$. Le même raisonnement montre que $B \subseteq X$. Voyons à présent quels sont les éléments de X qui ne sont pas dans B. Posons $Y = X \setminus B$. Alors $Y \cap A = \emptyset$. En effet, sinon il existerait $y \in Y \cap A$, et puisque $Y = X \setminus B$, $y \in X \cap A$ mais $y \notin B$, donc $X \cap A \neq B$. Remarquons que $X = B \cup (E \setminus B) = B \cup Y$. D'où $X = B \cup Y$, avec $Y \cap A = \emptyset$, c'est-à-dire $Y \subseteq A^c$. Ainsi l'ensemble des X vérifiant (E) est inclus dans l'ensemble

$$\{B \cup Y : Y \in \mathcal{P}(A^c)\}.$$

— Réciproquement, voyons si les conditions qu'on vient d'établir comme nécessaires sont suffisantes pour que X vérifie (E). Supposons $B \subseteq A$ et $X = B \cup Y$ avec $Y \in \mathcal{P}(A^c)$. Alors

$$\begin{aligned} A \cap X &= A \cap (B \cup Y) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap Y) \\ &= B \cup \emptyset = B. \end{aligned}$$

Au final, si $B \not\subseteq A$, l'ensemble des parties X vérifiant (E) est vide, et sinon il s'agit de l'ensemble

$$\{B \cup Y : Y \in \mathcal{P}(A^c)\}.$$