Raisonnements mathématiques
Corrigé (incomplet) TD n°1

Octobre 2016

Exercice 9

1. On cherche les entiers p vérifiant la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (p|n \implies 2|n). \tag{P_1}$$

— Supposons qu'il existe un entier p vérifiant la propriété (P_1) ci-dessus, alors $2|p$. En effet, $p|p$ donc $2|p$.
— Réciproquement, si $2|p$, alors p vérifie (P_1). En effet si $p|n$, $2|n$ car $2|p$.

D'où l'ensemble des entiers p vérifiant (P_1) est l'ensemble des entiers pairs.

2. On cherche les entiers p vérifiant la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n|p \implies 2|n). \tag{P_2}$$

L'ensemble est vide. En effet, supposons qu'il existe un entier p satisfaisant (P_2). Alors on a $1|p$ mais $2 \nmid 1$, donc $(n|p \implies 2|p)$ n'est pas vérifié pour $n = 1$, ce qui contredit (P_2).

Modifions à présent l'énoncé pour rendre la question plus intéressante. Cherchons plutôt les entiers p vérifiant la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ((n \geq 2 \wedge n|p) \implies 2|n). \tag{P_2'}$$

— Remarquons que $p = 0$ ne satisfait pas (P_2'). En effet par exemple $3 \geq 2$, $3|0$ mais $2 \nmid 3$, donc $(n \geq 2 \wedge n|p) \implies 2|n$ n'est pas vérifié pour $n = 3$.
— Remarquons ensuite que $p = 1$ satisfait (P_2'). En effet son seul diviseur est 1, donc $n \geq 2 \wedge n|p$ n'est jamais vérifié, donc l'implication $(n \geq 2 \wedge n|p) \implies 2|n$ est toujours vraie (rappelons que si A est faux, l'implication $A \implies B$ est vraie).
— Supposons qu'il existe $p \geq 2$ satisfaisant (P_2'). Alors p admet au moins un diviseur premier. Soit q un diviseur premier de p, alors $q \geq 2$ et $q|p$, donc d'après (P_2'), $2|q$. Mais q est premier, donc nécessairement $q = 2$ (les seuls diviseurs d'un nombre premiers sont 1 et lui-même). Ainsi p n'admet que 2 comme diviseur premier, donc il existe $k \geq 1$ tel que $p = 2^k$.

En résumé, on vient de montrer que l'ensemble des p satisfaisant (P_2') était inclus dans l'ensemble $\{2^k : k \in \mathbb{N}\}$ ($p = 1$ est obtenu pour $k = 0$). Montrons la réciproque.

— Soit $p \in \{2^k : k \in \mathbb{N}\}$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2^k$. Si $k = 0$, $p = 1$ vérifie bien (P_2') comme on l'a vu. Si $k \geq 1$, alors il existe $n \geq 2$ tel que $n|p$. Comme $p = 2^k$, $n|2^k$, donc n admet 2 comme (seul) diviseur premier, donc $2|n$. D'où p satisfait (P_2').

Ainsi l'ensemble des entiers p satisfaisant (P_2') est $\{2^k : k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 10

1. Notons A la variable booléenne indiquant le déclenchement de l'alarme (Vrai si elle se déclenche, Faux sinon), P celle indiquant que la pression dépasse le seuil critique, et O celle indiquant que la valve est obstruée. Alors le raisonnement en français se traduit sous forme mathématique par l'énoncé

$$[(A \iff (P \wedge O)) \wedge \neg O] \implies (A \iff P). \qquad (E_1)$$

Le raisonnement est valide si quelles que soient les valeurs de A, P et O, l'énoncé (E_1) est vrai, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une tautologie. Vérifions si c'est le cas en utilisant une table de vérité.

A	P	O	$A \iff (P \wedge O)$	$\neg O$	$A \iff P$	E_1
F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V
V	V	V	F	V	F	V
V	V	V	F	F	F	V
V	V	V	F	V	V	V
V	V	V	V	F	V	V

Donc le raisonnement est valide.

2. Notons

   — I : les impôts augmentent
   — C : le chômage augmente
   — R : il y a une période de récession
   — P : le PIB augmente.

Le raisonnement se traduit par l'énoncé

$$[((I \wedge C) \implies R) \wedge (P \implies \neg R) \wedge (P \wedge I)] \implies \neg C. \qquad (E_2)$$

Écrivons la table de vérité, en posant $X = ((I \wedge C) \implies R)$, $Y = (P \implies \neg R)$, et $Z = (P \wedge I)$, de sorte que (E_2) s'écrit $(X \wedge Y \wedge Z) \implies \neg C$.

I	C	R	P	X	Y	Z	$X \wedge Y \wedge Z$	$\neg C$	E_2
F	F	F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	V	V	F	F	V
V	V	V	F	V	V	F	F	F	V
V	V	V	V	V	F	V	F	F	V

Donc le raisonnement est valide.

Exercice 12

1. L'énoncé est clairement vrai. En effet, soit $x \in \mathbb{N}$. Alors posant $y = 2x$, y est bien un entier vérifiant $2x - y = 0$.
2. L'énoncé est faux. En effet, montrons que la négation est vraie. La négation est

$$\forall y \in \mathbb{N} \ \exists x \in \mathbb{N} \quad 2x - y \neq 0.$$

Soit $y \in \mathbb{N}$. Si y est pair, posons $x = \frac{y}{2} + 1$, et sinon posons $x = \frac{y+1}{2}$, alors on a bien dans les deux cas x est entier et $2x - y \neq 0$. D'où la négation est vraie.

Exercice 13

1. Cela ne change rien, on peut faire le même raisonnement en remplaçant $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}$ et « entier » par « réel ».
2. L'énoncé est toujours faux. La négation se montre encore plus facilement : pour $y \in \mathbb{R}$, il suffit de poser $x = \frac{y}{2} + 1$.

Exercice 12 (modifié)

1. Considérons plutôt l'énoncé

$$\forall x \in \mathbb{N} \ \exists y \in \mathbb{N} \quad x - 2y = 0.$$

Alors celui-ci est faux. En effet, considérons la négation, qui est

$$\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} \quad x - 2y \neq 0.$$

Prenons n'importe quel entier x impair, par exemple posons $x = 1$. Alors pour tout entier y, on a $x - 2y = 1 - 2y \neq 0$. Ainsi la négation est vraie, donc l'énoncé d'origine est faux.

2. Considérons plutôt l'énoncé

$$\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N} \quad x - 2y = 0.$$

Celui-ci est faux. En effet montrons que la négation est vraie. Celle-ci s'écrit

$$\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} \quad x - 2y \neq 0.$$

Soit $y \in \mathbb{N}$, alors posons $x = 2y + 1$. On a bien $x \in \mathbb{N}$ et $x - 2y = 1 \neq 0$. La négation étant vraie, l'énoncé d'origine est donc faux.

Exercice 13 (modifié)

Reprenons l'exercice 12 modifié en remplaçant $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}$.

1. L'énoncé devient vrai. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = \frac{x}{2}$, alors $y \in \mathbb{R}$ (mais pas nécessairement à $\mathbb{N}$, c'est là toute la différence) et $x - 2y = 0$. D'où le résultat.
2. L'énoncé reste faux, et cela se montre de la même manière que pour $\mathbb{N}$.