Raisonnements mathématiques
Corrigé contrôle n°4

22 novembre 2016

Exercice 1

1. Posons $E_1 = (A \iff (B \iff C))$ et $E_2 = ((A \iff B) \iff C)$. Écrivons la table de vérité de E_1 et E_2.

A	B	C	$A \iff B$	$B \iff C$	E_1	E_2
F	F	F	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F
V	V	F	V	F	F	F
V	V	V	V	V	V	V

On voit que les tables de E_1 et E_2 sont identiques, d'où l'égalité souhaitée.

2. $\implies$ n'est pas associative, car

$$(\text{Faux} \implies (\text{Faux} \implies \text{Faux})) = \text{Vrai}$$

mais

$$((\text{Faux} \implies \text{Faux}) \implies \text{Faux}) = (\text{Vrai} \implies \text{Faux}) = \text{Faux}.$$

De même, $\impliedby$ n'est pas associative.

3. En fait l'énoncé n'est pas une tautologie. En effet posons

$$E = ((A \iff (B \wedge C)) \vee ((B \iff A) \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)),$$

puis construisons sa table de vérité.

A	B	C	$A \iff (B \wedge C)$	$(B \iff A) \wedge \neg C$	$C \wedge \neg B)$	$\neg A \wedge B \wedge C$	E
F	F	F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F	V
V	V	F	F	V	F	F	V
V	V	V	V	F	F	F	V

On remarque que si $A =$ Vrai, $B =$ Faux et $C =$ Faux, alors $E =$ Faux.

Exercice 2

1. Définition par compréhension :
$$\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2k\}$$
Par image d'une fonction :
$$\{2k : k \in \mathbb{N}\}$$
2. Soit l'application
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \to & \mathcal{P} \\ n & \mapsto & 2n, \end{array}$$
alors f est bien injective. En effet, soient n et m deux entiers naturels. Si $n \neq m$, alors $2n \neq 2m$, donc $f(n) \neq f(m)$.
3. L'application donnée est bien surjective. En effet, soit $y \in \mathcal{P}$, alors par définition de $\mathcal{P}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n = y$, c'est-à-dire $f(n) = y$. Ainsi f est bijective, car à la fois injective et surjective.
4. Oui, on vient d'exhiber une application $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ bijective.
5. Il s'agit déjà de voir que si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est à la fois injective et surjective.
   - Montrons que $g \circ f$ est injective. Soient $x, y \in A$. Si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$ car f est injective. Or g est également injective, donc $g \circ f(x) \neq g \circ f(y)$.
   - Montrons que $g \circ f$ est surjective. Soit $c \in C$. f étant surjective, il existe $b \in B$ tel que $f(b) = c$. Puis g étant surjective il existe $a \in A$ tel que $g(a) = b$. Ainsi $g \circ f(a) = c$.

   Supposons ensuite que A et B sont en bijection, et B et C sont en bijection. Alors par définition il existe $f : A \to B$ et $g : B \to C$ bijectives. Or on vient de voir que ceci implique que $g \circ f : A \to C$ est bijective, donc par définition A et C sont en bijection.
   Remarque : on dit également que la relation « être en bijection » est une relation ***transitive****.*
6. Définition par compréhension :
$$\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2k + 1\}$$
Par image d'une fonction :
$$\{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$$
7. Soit
$$\begin{array}{rcl} g : \mathcal{P} & \to & \mathcal{I} \\ k & \mapsto & k + 1, \end{array}$$
alors g est bijective. En effet elle est clairement injective car $k \neq l \implies k + 1 \neq l + 1$. Elle est de plus surjective. Considérons $m \in \mathcal{I}$, alors $m - 1$ est pair et positif (car $m \geq 1$), et $g(m - 1) = m$. D'où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont en bijection. Ainsi on sait que $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}$ sont en bijection et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont en bijection, donc d'après la question 5 $\mathbb{N}$ et $\mathcal{I}$ sont en bijection.

8. Considérons l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

— Montrons que f est injective. Remarquons que si n est impair, $f(n)$ est strictement négatif, et si n est pair, $f(n)$ est positif ou nul. Soient n, $m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$. Si l'un est impair et l'autre est pair, alors nécessairement $f(n) \neq f(m)$ car l'une des images est positive, et l'autre est strictement négative. D'où il reste à traiter les deux cas suivants.

(1) Si n et m sont tous les deux pairs, alors $f(n) \neq f(m)$ car $n \neq m \implies n/2 \neq m/2$.

(2) Si n et m sont tous les deux impairs, alors $f(n) \neq f(m)$ car $n \neq m \implies -(n+1)/2 \neq -(m+1)/2$.

Ainsi dans tous les cas, si $n \neq m$, alors $f(n) \neq f(m)$, d'où f est injective.

— Montrons que f est surjective. Soit $z \in \mathbb{Z}$. Si $z \geq 0$, posons $n = 2z$. Alors n est en entier naturel pair et donc $f(n) = (2z)/2 = z$. Si $z < 0$, posons $n = -2z - 1$. Alors n est un entier naturel impair, et donc $f(n) = -(-2z - 1 + 1)/2 = z$. D'où f est surjective.

Ainsi f est bijective, donc $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont en bijection.

Exercice 3

Remarquons d'abord qu'on peut bien diviser par $1 - q$ car $q \neq 1$. Pour $N \geq n$, soit (P_N) la propriété

$$\sum_{i=1}^{N} q^i = q^n \frac{1 - q^{N-n+1}}{1 - q}.$$

(1) Initialisation. Pour $N = n$, on a

$$\sum_{i=n}^{N} q^i = \sum_{i=n}^{n} q^i = q^n$$

et

$$q^n \frac{1 - q^{n-n+1}}{1 - q} = q^n \frac{1 - q}{1 - q} = q^n,$$

d'où (P_n) est vraie.

(2) Supposons que (P_N) est vraie. Alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=n}^{N+1} q^i &= \sum_{i=1}^{N} q^i + q^{N+1} \\ &= q^n \frac{1-q^{N-n+1}}{1-q} + q^{N+1} \\ &= q^n \frac{1-q^{N-n+1}+q^{N+1-n}-q^{N+1-n+1}}{1-q} \\ &= q^n \frac{1-q^{N-n+2}}{1-q},\end{aligned}$$

d'où (P_{N+1}) est vérifiée.

Ainsi par le principe de récurrence, (P_N) est vraie pour tout $N \geq n$.

Exercice 4

1. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sin n| \leq 1$. Soit $\epsilon \in]0,+\infty[$. Considérons N le premier entier supérieur à $1/\epsilon - 1$, de sorte que $1/(N+1) \leq \epsilon$. Alors pour tout $n \geq N$ on a
$$|u_n - 0| = \frac{|\sin n|}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} \leq \epsilon.$$
On a ainsi montré
$$\forall \epsilon \in]0,+\infty[\ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies |u_n - 0| \leq \epsilon),$$
c'est-à-dire $u_n \to 0$.

2. (a) Soit $\epsilon \in]0,+\infty[$. D'après la définition de la limite, il existe N_1 tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N_1 \implies |u_n - l_1| \leq \epsilon/2), \tag{1}$$
et il existe N_2 tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N_2 \implies |u_n - l_2| \leq \epsilon/2). \tag{2}$$
Posons $N = \max(N_1, N_2)$, alors $N \geq N_1$ donc $|u_N - l_1| \leq \epsilon/2$ d'après (1), et $N \geq N_2$ donc $|u_N - l_2| \leq \epsilon/2$ d'après (2). Ainsi par l'inégalité triangulaire, on a
$$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$
d'où on a bien
$$\forall \epsilon \in]0,+\infty[\quad |l_1 - l_2| \leq \epsilon.$$
(b) Si $l_1 \neq l_2$, alors $|l_1 - l_2| > 0$. Posons $\epsilon = |l_1 - l_2|/2$, alors d'après la question précédente $|l_1 - l_2| \leq |l_1 - l_2|/2$, donc $|l_1 - l_2| \leq 0$. Ainsi $|l_1 - l_2| = 0$.

3. (a) Supposons que $u_n \to l$. Montrons que l est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\epsilon \in]0,+\infty[$ et $N \in \mathbb{N}$. Par définition de la limite, il existe N_1 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N_1 \implies |u_n - l| \leq \epsilon).$$

Posons $n = \max(N_1, N)$, alors $n \geq N_1$ donc $|u_n - l| \leq \epsilon$. De plus $n \geq N$, donc $n \geq N \wedge |u_n - l| \leq \epsilon$. On a bien montré

$$\forall \epsilon \in]0,+\infty[\ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \wedge |u_n - l| \leq \epsilon),$$

c'est-à-dire que l est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Remarquons pour tout entier n, on a

$$u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Soit $\epsilon \in]0,+\infty[$, et $N \in \mathbb{N}$. Alors considérons N_1 un entier supérieur à $1/(2\epsilon)$, de sorte que $1/(2N_1+1) \leq \epsilon$. Posons $n = \max(N, N_1)$, alors on a

$$|u_{2n+1}| = \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2N_1+1} \leq \epsilon$$

et de plus $2n+1 \geq N$, donc $2n+1 \geq N \wedge |u_{2n+1} - 0| \leq \epsilon$. On a ainsi montré que 0 était une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En revanche, la suite ne converge pas vers 0, car pour tout entier n, $u_{2n} > 2$, ce qui contredit la définition de la limite.

4. (a) Soit $\epsilon \in]0,+\infty[$. Puisque $u_n \to l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N_1 \implies |u_n - l| \leq \epsilon/2), \tag{3}$$

et puisque a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N_2 \geq N_1$ tel que $|u_{N_2} - a| \leq \epsilon/2$. Comme $N_2 \geq N_1$, d'après (3) on a également $|u_{N_2} - l| \leq \epsilon/2$. D'où d'après l'inégalité triangulaire, en procédant comme en 2.(a) on obtient $|l - a| \leq \epsilon$. On a ainsi montré

$$\forall \epsilon \in]0,+\infty[\quad |l - a| \leq \epsilon,$$

ce qui implique $l = a$ (en procédant comme en 2.(b)).

(b) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, cela signifie qu'il existe un unique (d'après la question 2.) nombre réel l tel que $u_n \to l$. Si a_1 et a_2 sont deux valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (éventuellement égales), alors d'après la question précédente $a_1 = l = a_2$, d'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour unique valeur d'adhérence sa limite l.

(c) Contrairement à ce qu'indique la question, 1 n'est pas valeur d'adhérence de u_n. En revanche 2 en est bien une. Montrons-le. Remarquons que pour tout entier naturel n

$$|u_{2n} - 2| = \frac{1}{2n+1}.$$

Soit $\epsilon \in]0, +\infty[$ et N en entier naturel. Alors en considérant N_1 un entier supérieur à $1/(2\epsilon)$, on a $1/(2N_1+1) \leq \epsilon$. Posons $N_2 = \max(N, N_1)$, de sorte que

$$|u_{2N_2} - 2| = \frac{1}{2N_2+1} \leq \frac{1}{2N_1+1} \leq \epsilon$$

et $2N_2 \geq N$. D'où 2 est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, d'après la question 3.(b), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux valeurs d'adhérences distinctes, 0 et 2, donc d'après la question précédente elle ne peut pas être convergente.

Remarque : on peut se demander si réciproquement une suite n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence est toujours convergente. Cela est faux, en effet on peut considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 0$ si n est pair, et $u_n = n$ sinon, qui n'admet que 0 comme valeur d'adhérence, mais qui n'est pas convergente.