NOM :
PRÉNOM : L1 - RM1 - Groupe Math 2

Raisonnements mathématiques

Contrôle n°4

Devoir maison

Novembre 2016

Exercice 1

1. Montrer que l'opération $\iff$ est associative, c'est-à-dire que, quelles que soient les valeurs des variables booléennes A, B et C, on a l'égalité

$$(A \iff (B \iff C)) = ((A \iff B) \iff C)$$

2. Les opérations $\implies$ et $\impliedby$ sont-elles associatives ? Justifier.
3. Montrer que l'énoncé suivant est une tautologie:

$$(A \iff (B \wedge C)) \vee ((B \iff A) \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$$

Exercice 2

1. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Donner une définition par compréhension et une définition par image d'une fonction de $\mathcal{P}$.
2. Exhiber une application $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ *injective*. Justifier qu'elle est bien injective.
   Remarque : on dit que $\mathbb{N}$ *s'injecte dans* $\mathcal{P}$.
3. L'application que vous avez exhibée à la question précédente est-elle surjective ? Si non, exhiber une application $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ qui est à la fois injective *et* surjective (i.e. bijective). Justifier.
4. On dit que deux ensemble A et B sont en bijection si il existe une application *bijective* $f : A \to B$. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}$ sont-ils en bijection ?
5. Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications bijectives. Montrer que $g \circ f : A \to C$ est bijective. En déduire que si A et B sont en bijection, et si B et C sont en bijection, alors A et C sont en bijection.
6. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des entiers naturels impairs. Donner une définition par compréhension et une définition par image d'une fonction de $\mathcal{I}$.
7. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont en bijection. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathcal{I}$ sont-ils en bijection ?
8. (Bonus) Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont en bijection.
   Indication : définir une application bijective $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *telle que les entiers pairs sont « envoyés » vers les entiers positifs, et les entiers impairs vers les entiers strictement négatifs.*

Exercice 3

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, et $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence que pour tout entier $N \geq n$, on a

$$\sum_{i=n}^{N} q^i = q^n \frac{1 - q^{N-n+1}}{1-q}.$$

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que u_n *converge vers* l, où $l \in \mathbb{R}$, si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \epsilon \in]0, +\infty[\;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies |u_n - l| \leq \epsilon).$$

On note alors $u_n \to l$, ou encore $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

1. Montrer que la suite définie par $u_n = \frac{\sin n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers 0.
2. (Unicité de la limite) Soient $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Supposons que $u_n \to l_1$ et $u_n \to l_2$.
   (a) Montrer que
   $$\forall \epsilon \in]0, +\infty[\quad |l_1 - l_2| \leq \epsilon$$
   Indication : en revenant à la définition, montrer qu'il existe un entier N tel quel pour tout $n \geq N$, $|u_n - l_1| \leq \epsilon/2$ et $|u_n - l_2| \leq \epsilon/2$. En déduire le résultat en remarquant que que $|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2|$ et en utilisant l'inégalité triangulaire.
   (b) Conclure rigoureusement en raisonnant par l'absurde que $l_1 = l_2$.
3. (Bonus) On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la proposition suivante est vérifiée :
   $$\forall \epsilon \in]0, +\infty[\;\; \forall N \in \mathbb{N} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \wedge |u_n - a| \leq \epsilon).$$
   (a) Montrer que si $u_n \to l$, alors l est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
   $$u_n = \frac{1}{n+1} + (1 + (-1)^n).$$
   Montrer que 0 est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite converge-t-elle vers 0 ?
   Indication : Considérer les termes pairs u_{2k} et les termes impairs u_{2k+1} de la suite.
4. (Bonus) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite convergente*, ou simplement *converge* si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to l$.
   (a) Montrer que si $u_n \to l \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $a = l$.
   Indication : procéder de manière similaire que pour la question 2.
   (b) Déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, elle admet une et une seule valeur d'adhérence.
   (c) Montrer que 2 est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la question 3.(b). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?