Raisonnements mathématiques
Corrigé contrôle n°3

22 novembre 2016

Exercice 1

1. On a
$$A \star \emptyset = A^c \cap \emptyset^c = A^c \cap E = E,$$
d'où A^c s'exprime bien à l'aide de l'opération $\star$ et de l'ensemble vide
2. On peut procéder ici directement par équivalence, en revenant à la définition du complémentaire, de la relation d'appartenance, et les lois de Morgan :
$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff x \in A \vee x \in B \\ &\iff \neg(x \in A^c) \vee \neg(x \in B^c) \\ &\iff \neg(x \in A^c \wedge x \in B^c) \\ &\iff \neg(x \in A^c \cap B^c) \\ &\iff x \in (A^c \cap B^c)^c \end{aligned}$$
Donc $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in (A^c \cap B^c)^c$, d'où $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$. De plus en utilisant la question précédente on a
$$\begin{aligned} (A^c \cup B^c)^c &= (A \star B)^c \\ &= (A \star B) \star \emptyset, \end{aligned}$$
d'où $A \cup B$ s'exprime uniquement à l'aide de l'ensemble vide et de l'opération $\star$.
3. De même on procède par équivalence pour montrer que $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$:
$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\iff x \in A \wedge x \in B \\ &\iff \neg(x \in A^c) \wedge \neg(x \in B^c) \\ &\iff \neg(x \in A^c \vee x \in B^c) \\ &\iff \neg(x \in A^c \cup B^c) \\ &\iff x \in (A^c \cup B^c)^c \end{aligned}$$
On n'a en réalité pas besoin de cette identité pour montrer que $A \cap B$ s'écrit uniquement à l'aide de $\star$ et de l'ensemble vide. En effet par définition de $\star$ on a
$$\begin{aligned} A \cap B &= A^c \star B^c \\ &= (A \star \emptyset) \star (B \star \emptyset). \end{aligned}$$

Exercice 2

On procède par disjonction des cas selon la parité de n. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(1) Si n est pair, alors $n(n+1)$ est bien pair.
(2) Si n est impair, alors $(n+1)$ est pair, donc $n(n+1)$ est pair.

Dans tous les cas, $n(n+1)$ est pair.

Exercice 3

1. On a
   - $0 \leq 0+4$ donc P_0 est fausse,
   - $1 \leq 1+4$ donc P_1 est fausse,
   - $2^2 = 4 \leq 6 = 2+4$ donc P_2 est fausse,
   - $3^2 = 9 > 7 = 3+4$ donc P_3 est vraie.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vraie, alors on a
$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &\geq n^2 + 1 \\ &> n + 1 + 4,\end{aligned}$$
donc P_{n+1} est vraie. D'où pour tout entier naturel n, $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie.
3. On a vu $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n \implies P_{n+1}$, et de plus P_3 est vraie, donc par le principe de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq 3 \implies P_n).$$

Exercice 4

Procédons par double inclusion.

1. Montrons que $f(A \cap f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \cap B$. Soit $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$, alors par définition il existe $x \in A \cap f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Ainsi $y \in f(A)$ car $x \in A$, et $y \in B$ car $x \in f^{-1}(B)$ (par définition $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments x de E tels que $f(x) \in B$). D'où $y \in f(A) \cap B$.
2. Montrons que $f(A) \cap B \subseteq f(A \cap f^{-1}(B))$. Soit $y \in f(A) \cap B$. Alors par définition de $f(A)$ il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $f(x) = y \in B$ donc par définition $x \in f^{-1}(B)$. Ainsi $y = f(x)$ avec $x \in A \cap f^{-1}(B)$, donc $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$. D'où $f(A) \cap B \subseteq f(A \cap f^{-1}(B))$.

Exercice 5

1. Supposons $A = \emptyset$. Soit $X \in \mathcal{P}(A)$, c'est-à-dire $X \in \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Alors nécessairement $X = \emptyset$, donc l'implication $X \subseteq A \implies (X = \emptyset \vee X = A)$ est vraie. D'où $(\mathcal{P})$ est vraie.
2. Supposons $A = \{a\}$. Soit $X \in \mathcal{P}(A)$, c'est-à-dire $X \in \mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$. Alors nécessairement $X = \emptyset$ ou $X = \{a\} = A$, donc l'implication $X \subseteq A \implies (X = \emptyset \vee X = A)$ est vraie. D'où $(\mathcal{P})$ est vraie.
3. Soit A tel que la propriété $(\mathcal{P})$ est vraie. Procédons par l'absurde, et supposons que A contient au moins deux éléments distincts a et b. Posons $X = \{a\}$. Alors $X \in \mathcal{P}(A)$ (ou encore $X \subseteq A$), mais $X \neq \emptyset$ et $X \neq A$ (car $b \in A$ mais $b \notin X$). Ainsi l'implication $X \subseteq A \implies (X = \emptyset \vee X = A)$ est fausse, ce qui contredit la propriété $(\mathcal{P})$. D'où A contient au maximum un élément, c'est donc soit l'ensemble vide, soit un singleton.