Raisonnements mathématiques
Corrigé contrôle n°3 bis

5 décembre 2016

Exercice 1

Procédons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $(\mathcal{P}_n)$ la propriété

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2. \tag{$\mathcal{P}_n$}$$

1. Commençons par l'initialisation. Pour $n = 0$, on a
$$\sum_{k=0}^{0} 0 * 2^0 = 0$$
et
$$(0-1) * 2^1 + 2 = -2 + 2 = 0,$$
donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
2. Montrons
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ((\mathcal{P}_n) \implies (\mathcal{P}_{n+1})).$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée. Déduisons-en que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie. On a, en utilisant l'hypothèse de récurrence,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k2^k &= \sum_{k=0}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} \\ &= (n-1+n+1)2^{n+1} + 2 \\ &= n2^{n+2} + 2,\end{aligned}$$
d'où $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vérifiée.
3. On a montré que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie, et de plus que pour tout entier naturel n, $(\mathcal{P}_n) \implies (\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, d'où par principe de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (\mathcal{P}_n).$$

Exercice 2

1. Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrons que f est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. Alors par injectivité de $g \circ f$, $g(f(x)) \neq g(f(y))$, d'où nécessairement $f(x) \neq f(y)$. Ainsi f est bien injective.

2. Supposons que $g \circ f$ est surjective. Montrons que g est surjective. Soit $z \in G$, alors par surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$. Posant $y = f(x)$, on a $y \in F$ et $g(y) = z$. D'où g est bien surjective.

Exercice 3

1. Procédons par double inclusion.

   — Montrons que $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Soit $y \in f(A \cup B)$. Alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$. Sinon si $x \notin A$, nécessairement $x \in B$, et donc $f(x) \in f(B)$. D'où $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

   — Montrons que $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Comme $A \subseteq A \cup B$, $f(A) \subseteq f(A \cup B)$, et comme $B \subseteq A \cup B$, $f(B) \subseteq f(A \cup B)$. D'où $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$.

   D'où $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$. Ainsi $x \in A$ donc $f(x) \in f(A)$, et $x \in B$ donc $f(x) \in f(B)$. D'où $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$.

3. Non. Considérons par exemple $E = \mathbb{R}$, $F = [0, +\infty[$, et $f : E \to F$ définie par $f(x) = x^2$. Posons $A =]-\infty, 0[$ et $B =]0, +\infty[$. Alors $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$, mais $f(A) \cap f(B) =]0, +\infty[\cap]0, +\infty[=]0, +\infty[$, de sorte que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.