Raisonnements mathématiques

Contrôle n°3

(45 minutes)

22 novembre 2016

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 *(3 points)*

Soit E un ensemble. On note $A^c = E \setminus A$, le complémentaire de A dans E, pour toute partie A de E. On définit l'opération $\star : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ en posant, pour toutes parties A et B de E :

$$A \star B = A^c \cap B^c.$$

1. Que vaut $A \star \emptyset$? Remarquer que A^c s'exprime donc à l'aide de l'opération $\star$ et de l'ensemble vide.
2. Montrer *en détail* que $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$, et en déduire une expression de $A \cup B$ utilisant le seul symbole $\star$.
3. Montrer *en détail* que $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, et en déduire une expression de $A \cap B$ utilisant le seul symbole $\star$.

Exercice 2 *(2 points)*

Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $n(n+1)$ est pair.

Exercice 3 *(3 points)*

Pour tout nombre entier naturel n, soit P_n la propriété donnée par

$$P_n : n^2 > n + 4.$$

1. Donnez les valeurs de vérité des propriétés P_0, P_1, P_2 et P_3.
2. Montrer que l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie quel que soit le nombre entier naturel n.
   Indication : on pourra distinguer les cas $n = 0$ et $n > 0$.
3. Donner un entier n_0 telle que la propriété P_n est vraie quel que soit $n \geq n_0$, c'est-à-dire tel que

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies P_n.$$

   Justifier votre réponse.

Exercice 4 *(2 points)*

Soit f une application de E dans F, $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. Montrer que

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

Exercice 5 *(3 points)*

Soit A un ensemble. On considère la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

$$\forall X \in \mathcal{P}(A) \quad X \subseteq A \implies (X = \emptyset \vee X = A) \qquad (\mathcal{P})$$

1. Montrer que si $A = \emptyset$, la propriété $(\mathcal{P})$ est vraie.
2. Montrer si A est un singleton, c'est-à-dire qu'il existe un certain élément a tel que $A = \{a\}$, alors la propriété $(\mathcal{P})$ est vraie.
3. Réciproquement, soit A un ensemble vérifiant la propriété ci-dessus. Montrer que A est soit l'ensemble vide soit un singleton.

   Indication : supposer que A contient au moins deux éléments distincts a et b. Considérer X un singleton inclus dans A pour en déduire une contradiction.