Raisonnements mathématiques
Corrigé contrôle n°2

25 octobre 2016

Exercice 1 *(3,5 points)*

1. La proposition est vraie. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = ix$, alors $y \in \mathbb{C}$ et $x^2 + y^2 = x^2 - x^2 = 0 \leq 0$, d'où le résultat.
2. La négation de l'énoncé est

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{C} \quad x^2 + y^2 \leq 0.$$

Il s'agit de l'énoncé de la question 1, dont on a vu qu'il était vrai. D'où l'énoncé d'origine est faux.

3. On peut le démontrer par calcul direct. On a, en utilisant les lois de De Morgan

$$\begin{aligned}(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) &= ((\neg A \vee B) \wedge \neg B) \vee ((\neg A \vee B) \wedge A) \\ &= (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge A) \\ &= (\neg A \wedge \neg B) \vee \text{Faux} \vee \text{Faux} \vee (B \wedge A) \\ &= (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

On peut également démontrer le résultat en remplissant les tables de vérités des énoncés, et vérifier qu'elles sont identiques :

A	B	$\neg A \vee B$	$\neg B \vee B$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
Faux	Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Vrai	Vrai	Faux	Faux	Faux	Faux	Faux
Vrai	Faux	Faux	Vrai	Faux	Faux	Faux	Faux
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Vrai

Exercice 2 *(4 points)*

1.

(a) $a \in \{a, b, c\}$

(b) $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$

(c) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$

(d) Impossible

(e) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}, \{a, b\}, 1\}$

(f) $\{1, 2\} \subseteq \mathcal{P}(\{1, 2, 6, 5\})$

(g) $[0, 1] \subseteq \{0, 1\} \cup]0, 1[$

(h) Impossible

2. Tout simplement

$$\{2, 3, 5, 9, 17, \ldots, 2^k + 1, \ldots\}.$$

3. Soit $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+3y+1=0\}$, alors on a
$$y = \frac{-2x^2-1}{3},$$
d'où $(x,y) = (x, (-2x^2-1)/3)$. Réciproquement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x, (-2x^2-1)/3)$ vérifie $2x^2+3y+1=0$. D'où l'ensemble s'écrit sous forme de fonction
$$\left\{ \left(x, \frac{-2x^2-1}{3} \right) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3 *(2,5 points)*

1. Procédons par double inclusion.
   - Montrons que $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. Soit $x \in (A \cup B)^c$. Alors $x \in E$ et $x \notin A \cup B$. Or, en détaillant complètement,
$$\begin{aligned} x \notin A \cup B &\iff \neg(x \in A \cup B) \\ &\iff \neg(x \in A \vee x \in B) \\ &\iff \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \\ &\iff x \notin A \wedge x \notin B, \end{aligned}$$
   d'où $x \in A^c$ et $x \in B^c$, c'est-à-dire $x \in A^c \cap B^c$.
   - Réciproquement, si $x \in A^c \cap B^c$, on peut remonter la suite d'équivalences ci-dessus, et on obtient $x \notin A \cup B$, d'où $x \in (A \cup B)^c$.

   D'où l'égalité demandée.
2. On procède comme ci-dessus, en utilisant la suite d'équivalence
$$\begin{aligned} x \notin A \cap B &\iff \neg(x \in A \cap B) \\ &\iff \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\iff \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \\ &\iff x \notin A \vee x \notin B, \end{aligned}$$
3. Soit $x \in E$. Alors on a les équivalences
$$x \in (A^c)^c \iff x \notin A^c \iff x \in A$$
   D'où l'égalité $(A^c)^c = A$. Pour montrer que $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$,il suffit d'utiliser $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (question 2) et de passer au complémentaire. On obtient alors $A \cap B = ((A \cap B)^c)^c = (A^c \cup B^c)^c$.
4. Par exemple deux manières différentes sont :
   - partir de $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (question 1), et passer au complémentaire en utilisant la question 3. On obtient directement $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$.
   - utiliser $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ (question 3), avec A^c à la place de A et B^c à la place de B. On obtient alors $A^c \cap B^c = ((A^c)^c \cup (B^c)^c)^c$, donc $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$. En passant le tout au complémentaire, on trouve $(A^c \cap B^c)^c = ((A \cup B)^c)^c = A \cup B$.