Raisonnements mathématiques
Corrigé contrôle n°1

4 octobre 2016

Exercice 1 *(2 points)*

1. Variables libres : N, j
   Variable liée : i (mutifiée par le symbole somme)
2. En détaillant plus que nécessaire, on a

$$S_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$
$$S_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i+2} = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2+2} = \frac{7}{12}$$

Exercice 2 *(5 points)*

1. (a) On a bien sûr
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x = 0 \quad \Longleftarrow \quad x = 0),$$
car $\sin 0 = 0$. L'implication $\sin x = 0 \implies x = 0$ est fausse pour certaines valeurs de x. Par exemple $\sin \pi = 0$ et $\pi \neq 0$.
   (b) Il y a équivalence :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z} \quad x = k\pi)).$$
En effet les valeurs de x pour lesquelles $\sin x = 0$ sont exactement les multiples entiers de π, qui sont décrits par l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = k\pi\}$.
2. Pour ceux qui ne l'auraient pas remarqué, une fois les 3$^{\text{è}}$ et 4$^{\text{è}}$ colonnes complétées, la dernière s'obtient simplement en faisant un « ET » logique de ces deux-là. En effet, posant $C_1 = A \vee B$ et $C_2 = \neg(A \wedge B)$, on voit que $A \oplus B = C1 \wedge C_2$.
   On obtient la table de vérité suivante :

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \wedge B)$	$A \oplus B$
Faux	Faux	Faux	Vrai	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux

Exercice 3 *(3 points)*

1. L'énonce est faux. On procède en démontrant que la négation est vraie :

$$\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} \quad x - 3y \neq 0.$$

   Il s'agit donc de montrer qu'il existe un entier x tel que, quel que soit y entier, $x - 3y$ est non nul. Posons $x = 1$, alors on a bien, quel que soit $y \in \mathbb{N}$, $1 \neq 3y$, car 1 n'est pas multiple de 3. Ainsi la négation de l'énoncé d'origine est vraie, donc l'énoncé d'origine est faux.

   Remarque : une autre correction acceptable consiste à dire que l'énoncé d'origine est faux, car s'il était vrai il impliquerait l'énoncé

$$\forall x \in \mathbb{N}\ x \text{ est multiple de } 3,$$

   ce qui est absurde.

2. Oui, l'énoncé devient vrai. En effet, soit $x \in \mathbb{N}$. Posons $y = x/3$, alors $y \in \mathbb{R}$ (remarquez que y n'est pas forcément un entier !), et on a $x - 3y = x - 3(x/3) = 0$. On a bien montré que quel que soit l'entier x, on pouvait trouver un réel y tel que $x - 3y = 0$.

Exercice 4 *(2 points)*

On propose deux corrections.

1. Par une table de vérité

A	B	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
Faux	Faux	Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai	Faux	Vrai
Vrai	Vrai	Faux	Faux	Faux

On remarque que la dernière colonne est identique à celle de $A \oplus B$ calculée dans l'exercice 2. D'où l'égalité $A \oplus B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

2. Par calcul direct, en utilisant les lois de Morgan et le fait que $A \vee \neg A$ est une tautologie. On a

$$\begin{aligned}(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) &= (A \vee \neg A) \wedge (A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee B)\\ &= (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)\\ &= (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)\\ &= A \oplus B.\end{aligned}$$