Devoir maison

à rendre le 20 avril

Partie préliminaire

1. **(cette question étant à limite du programme, il est tout à fait possible de la sauter et d'admettre le résultat pour traiter la suite du sujet)** Soit Γ une courbe de classe C^1 fermée simple de $\mathbb{R}^n$ et $\gamma : \mathbb{R} \to \Gamma$ une application de classe C^1 telle que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma'(t) \neq 0.$$
Montrer que
— soit $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t)$ existe ;
— soit il existe $T > 0$ tel que $\gamma(T) = \gamma(0)$.
[*Indication : on admettra que si $x_0 \in \Gamma$, alors $\Gamma\backslash\{x_0\}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}$.*]
2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1. On considère l'équation différentielle autonome $x' = f(x)$. Supposons que $x(t)$ est une solution de $x' = f(x)$ définie sur $[0, +\infty[$ ayant une limite $x_\infty \in \Omega$ pour $t \to +\infty$. Montrer que x_∞ est un équilibre.

On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$ suivante
$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = -3x^2 - 12x \end{cases} \tag{1}$$

0. (a) Trouver tous les équilibres de (1).
   (b) Pour chaque équilibre de (1), écrire le système linéarisé, le résoudre et tracer l'allure des solutions.
1. Montrer que la fonction $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(x, y) = x^3 + 6x^2 + y^2$ est constante le long les solutions de (1).

Les courbes de niveau de H sont représentées sur la figure. On note γ la courbe de niveau qui passe par $A = (-4, 0)$ et Ω la région à l'intérieur de la boucle formée par γ.

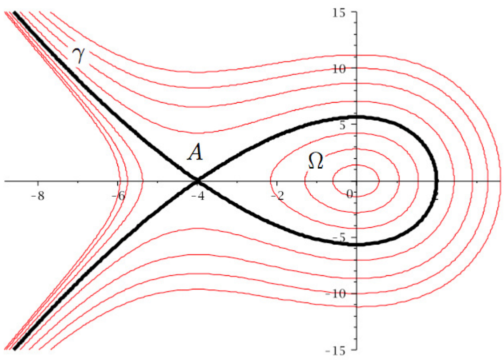

FIGURE 1 – Courbes de niveau de $H(x, y)$.

Mettre des flèches sur le dessin précédent donnant le sens de parcours des orbites.

2. Montrer que toute solution maximale de (1) issue d'un point de Ω est définie sur tout $\mathbb{R}$. En déduire qu'elle est périodique. [*Indication : utiliser la partie préliminaire*]
3. Soit $(x(t), y(t)) : I \to \mathbb{R}^2$ une solution (maximale) issue de γ de condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \gamma$.
   (a) Que peut-on dire de son intervalle de définition si $x_0 \geq -4$?
   (b) i. On suppose que $x_0 < -4$ et $y_0 < 0$. et on note $I =]T_-, T_+[$. Montrer que $T_- = -\infty$.
      ii. Montrer que $\lim\limits_{T_+} x = \lim\limits_{T_+} y = -\infty$ et que $x^3(t)$ est équivalente en T_+ à $-y^2(t)$.

iii. En déduire qu'il existe $T \in]-\infty, T_+[$ tel que

$$\forall t \in]T, T_+[, x'(t) \leq -|x|^{\frac{3}{2}} = -(-x)^{\frac{3}{2}}.$$

iv. En déduire que T_+ est fini.

(c) Montrer que si $x_0 < -4$ et $y_0 > 0$, on a $I =]T_-, +\infty[$ avec T_- réel.

4. Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\begin{cases} x' = 2y + (H(x,y) - 32)y \\ y' = -3x^2 - 12x + (H(x,y) - 32)x \end{cases} \tag{2}$$

Que peut-on dire sur l'intervalle de définition d'une solution issue d'un point (x_0, y_0) de γ ? Et de celles issues d'un point de Ω ?