$\boxed{\text{TD7}}$ Ex 5

1) Φ est affine s'il existe une forme linéaire L sur E tq $\forall x,y \in E$, $\Phi(x)-\Phi(y) = L(x-y)$.

Ici $(\Phi(x)-\Phi(y))(t) = \Phi(x)(t) - \Phi(y)(t) = 1 + \int_0^t x(u)\,du - 1 - \int_0^t y(u)\,du$

$$= \int_0^t (x-y)(u)\,du$$

$$= L(x-y)(t)$$

où $L(f) := \left(t \mapsto \int_0^t f(u)\,du\right)$ $\forall f \in E$, et on vérifie aisément que L est une forme linéaire.

2) Si φ est une solution du problème de Cauchy $\begin{cases} x' = x & \text{sur } [-a,a] \\ x(0) = 1 \end{cases}$

alors $\varphi \in C^1([-a,a])$ et $\varphi(t) - \underbrace{\varphi(0)}_{=1} = \int_0^t \varphi'(u)\,du$

$$= \int_0^t \varphi(u)\,du$$

donc $\Phi(\varphi)(t) = \varphi(t)$, $\forall t \in [-a,a]$, càd $\boxed{\Phi(\varphi) = \varphi}$, et φ est un point fixe de Φ.

3) Soient $x, y \in E$, et $t \in [-a,a]$.

Alors $|(\Phi(x)-\Phi(y))(t)| = \left|\int_0^t x(u) - y(u)\,du\right| \leq \int_0^{|t|} |x(u)-y(u)|\,du \leq \|x-y\|_{\infty,[-a,a]} |t|$

$$\leq |a|\ \|x-y\|_{\infty,[-a,a]},$$

où $\|x-y\|_{\infty,[-a,a]} = \sup_{t\in[-a,a]} |x(t)-y(t)|$.

$\boxed{\text{Ainsi } \|\Phi(x)-\Phi(y)\|_{\infty,[-a,a]} \leq |a|\ \|x-y\|_{\infty,[-a,a]}}$, où $|a| \in]0,1[$, et Φ est bien contractante.

Soit $x_0 \in E$, et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = \Phi(x_n)$. Comme E est un espace de Banach et Φ est contractante, d'après le théorème de Banach-Picard, la suite (x_n) converge vers l'unique point fixe x_* de Φ.

On peut refaire la preuve "à la main" :

On a $x_n = \underbrace{\phi \circ \phi \circ \cdots \phi}_{n \text{ fois}}(x_0) = \phi^n(x_0)$, et on montre facilement que

$\forall x, y \in E$, $\|\phi^n(x) - \phi^n(y)\|_\infty \leq |a|^n \|x-y\|_\infty$.

Soit $n, p \in \mathbb{N}$, alors $\|x_{n+p} - x_n\|_\infty = \|\phi^n(x_p) - \phi^n(x_0)\|_\infty$ (1)

$\leq |a|^n \|x_p - x_0\|_\infty$

d'autre part, $|\phi(x)(t)| \leq \int_0^{t4} |x(u)|\,du \leq |a| \|x\|_\infty \leq \|x_\infty\|$ donc $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$,

d'où $\|x_p\|_\infty = \|\phi(x_{p-1})\|_\infty \leq \|x_{p-1}\|_\infty \leq \cdots \leq \|x_0\|$, et donc d'après (1), on a

$\|x_{n+p} - x_n\| \leq |a|^n \|x_p - x\|_\infty \leq |a|^n (\|x_p\|_\infty + \|x_0\|_\infty) \leq 2|a|^n \|x_0\|_\infty \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ indépendamment de p

ce qui montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Mais E est un espace de Banach, donc complet, donc la suite converge vers un certain $x_* \in E$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrivons $\|x_* - \phi(x_*)\|_\infty = \|x_* - x_n + x_n - \phi(x_*)\|_\infty$

$\leq \|x_* - x_n\|_\infty + \|x_n - \phi(x_*)\|_\infty$

$= \|x_* - x_n\|_\infty + \|\phi(x_{n-1}) - \phi(x_*)\|_\infty$

$\leq \|x_* - x_n\|_\infty + |a| \|x_{n-1} - x_*\|_\infty$

$\xrightarrow{n \to +\infty} 0$

donc $x_* = \phi(x_*)$, càd x_* est un point fixe de ϕ.

On peut aussi remarquer que ce point fixe est unique. En effet, si y_* est aussi un point fixe de ϕ, $\|x_* - y_*\|_\infty = \|\phi(x_*) - \phi(y_*)\|_\infty = \cdots = \|\phi^n(x_*) - \phi^n(y_*)\|_\infty$

$\leq |a|^n \|x_* - y_*\|_\infty$.

$\xrightarrow{n \to +\infty} 0$

donc $x_* = y_*$

4) On a vu dans la preuve en rouge de la convergence l'inégalité

$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\|_\infty \leq |a| \|x_1 - x_2\|_\infty$, ce qui donnerait en itérant $\|\phi^n(x_1) - \phi^n(x_2)\|_\infty \leq |a|^n \|x_1 - x_2\|_\infty$

Ce n'est pas suffisant. Affinons :

$|\phi(x_1)(t) - \phi(x_2)(t)| \leq \int_0^{t4} |x_1(u) - x_2(u)|\,du \leq \|x_1 - x_2\|_\infty |t|$

Supposons (H_n) : $\forall t \in [-a,a]$, $|\phi^n(x_1)(t) - \phi^n(x_2)(t)| \leq \|x_1 - x_2\|_\infty \dfrac{|t|^n}{n!}$.

On vient de voir que H_1 était vraie.

Alors $|\phi^{n+1}(x_1)(t) - \phi^{n+1}(x_2)(t)| = |\phi(\phi^n(x_1))(t) - \phi(\phi^n(x_2))(t)|$

$$\leq \int_0^{|t|} |\phi^n(x_1)(u) - \phi^n(x_2)(u)| \, du$$

$$\leq \|x_1 - x_2\|_\infty \int_0^{|t|} \frac{|u|^n}{n!} \, du$$

$$= \|x_1 - x_2\|_\infty \frac{|t|^{n+1}}{n+1!}$$

D'où (H_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci implique $\|\phi^n(x_1) - \phi^n(x_2)\|_\infty \leq \|x_1 - x_2\|_\infty \dfrac{|a|^n}{n!}$

Comme $\dfrac{|a|^n}{n!} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ (quel que soit a), il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $\dfrac{|a|^N}{N!} < 1$.

Posons $k = \dfrac{|a|^N}{N!}$ et $\Psi = \phi^N$. Alors $\|\Psi(x_1) - \Psi(x_2)\|_\infty \leq k \|x_1 - x_2\|_\infty$, où $k \in]0,1[$

de sorte que Ψ est contractante, et étant donné $x_0 \in E$, la suite définie par $x_{n+1} = \Psi(x_n)$ converge vers x_* l'unique point fixe de Ψ d'après le thm du point fixe de Picard.

Vérifions que x_* est un point fixe de φ :

On a $\Psi(x_*) = x_*$, i.e. $\varphi^N(x_*) = x_*$.

Mais alors $\Psi(\varphi(x_*)) = \varphi^N(\varphi(x_*)) = \varphi^{N+1}(x_*) = \varphi(\varphi^N(x_*))$, car $\varphi^N(x_*) = x_*$

$= \varphi(x_*)$

d'où $\varphi(x_*)$ est aussi un point fixe de Ψ. Mais comme x_* est l'unique point fixe de Ψ, nécessairement $\varphi(x_*) = x_*$, càd x_* est un point fixe de φ.

On peut aussi vérifier que ce point fixe de φ est unique. Si $y_* \in E$ est aussi un point fixe de φ, $y_* = \varphi(y_*)$, et donc $\Psi(y_*) = \varphi^N(y_*) = \dots = \varphi(y_*) = y_*$, donc y_* est un point fixe de Ψ. Mais comme il est unique, $y_* = x_*$.

5) - Méthode de la question 3. Partant de x_0, on définit $x_{n+1} = \Phi(x_n)$.

On a vu dans la question 4) $|(\phi^n(x_2) - \phi^n(x_1))(t)| \leq \|x_2 - x_1\|_\infty \frac{|t|^n}{n!}$.

Donc $|(x_{n+p} - x_n)(t)| = |(\phi^n(x_p) - \phi^n(x_0))(t)| \leq \|x_p - x_0\|_\infty \frac{|t|^n}{n!} \leq \|x_p - x_0\|_\infty \frac{|a|^n}{n!}$

Faisant tendre p vers $+\infty$, on trouve $\|x_* - x_n\|_\infty \leq \|x_* - x_0\|_\infty \frac{|a|^n}{n!}$

Or $\frac{|a|^n}{n!} = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ pour tout $k \geq 0$ (on pourra par exemple se servir de de la formule de Stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$).

Ainsi la méthode est + que d'ordre k, quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

- Méthode d'Euler explicite :

De $x_0 = 1$ (condition initiale) ⚠ ici les x_i sont des réels

On se place sur $[0,a]$ et on choisit un pas $h = \frac{a}{n}$, et on définit

$$x_{i+1} = x_i + hF(t_i, x_i) \quad \text{où } t_i = ih \text{ et } F(t,x) = x$$
$$= x_i + h x_i = (1+h) x_i.$$

On pose ensuite $\tilde{x}^n$ la fonction affine par morceaux sur $[0,a]$ tq $\tilde{x}^n(t_i) = x_i, \forall i \in [0,\dots,n]$.

Il faudrait alors évaluer $\|\tilde{x}^n - f\|_{\infty,[0,a]}$, où $f(t) = e^t$ est la solution du pb de Cauchy

Pour simplier, contentons nous d'évaluer $|\tilde{x}^n(a) - f(a)|$

$$= |\tilde{x}^n(t_n) - e^a| = |x_n - e^a|$$

Or $x_n = (1+h)x_{n-1} = \dots = (1+h)^n x_0 = (1+h)^n$,

donc $|\tilde{x}^n(a) - f(a)| = |(1+h)^n - e^a| = \left|\left(1+\frac{a}{n}\right)^n - e^a\right|$

On a $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n - e^a = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right) - e^a$

$$= \exp\left(n\left(\frac{a}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) - e^a$$

$$= \exp\left(a - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - e^a = e^a\left(\exp\left(\frac{-a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right)$$

Par composition $\exp\left(-\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1-\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n - e^a = e^a\left(-\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{-a^2e^a}{2n^{1}}$$

D'où la méthode d'Euler explicite est au mieux d'ordre 1. Elle en fait exactement d'ordre 1. (cf cours)

Commentaire : La méthode du point fixe converge théoriquement beaucoup plus vite que la méthode d'Euler explicite (au moins dans ce cas précis), mais en pratique, comment calculer numériquement $\phi(x)$? Il faut calculer numériquement l'$\int$ $\Rightarrow$ méthodes de quadrature (intégration numérique).