$\boxed{TD7}$ Ex 4

1) On considère le système $x' = F(t,x)$ où $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(t,x) \mapsto x^2 - t$.

F est une fonction polynomiale, en particulier elle est C^1 donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 - t \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (*)$$

On note u cette solution maximale définie sur l'intervalle ouvert I contenant 0, et on admet que $[-1,1] \subset I$.

2) On note $I_+ = [0,+\infty[\cap I$.

a) On pose la fonction $v : I \to \mathbb{R}$ définie par $v(t) = u(t)^2 - t$.
Alors v est continue sur I car u est continue, et $v(0) = u(0)^2 - 0 = 1$.
Par continuité de v en 0, il existe donc $\varepsilon > 0$ tq $\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $v(t) > \frac{1}{2}$,
c'est-à-dire $u(t)^2 - t > \frac{1}{2}$.

b) Supposons $u(t)^2 - t > \frac{1}{2}$, $\forall t \in]0,T[$.

Comme u est solution du pb de Cauchy $(*)$, pour tout $t \in]0,T[$,
on a $u'(t) = u(t)^2 - t > \frac{1}{2}$, donc u est strictement croissante sur $]0,T[$.

Comme $u'(t) = u(t)^2 - t$ et $t \mapsto u(t)^2 - t \in C^1(I)$, $u' \in C^1(I)$ et donc $u \in C^2(I)$. Étudions u'' sur $]0,T[$.

$$\begin{aligned} u''(t) &= \frac{d}{dt}\left(u(t)^2 - t\right) = 2u'(t)u(t) - 1 \quad \text{car } u'(t) > \tfrac{1}{2} \text{ et } u(t) > u(0) \geq 0 \\ &> u(t) - 1 \quad \text{car } u \text{ strict. } \nearrow \\ &> u(0) - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

u'' est strictement positive sur $]0,T[$ donc u est strictement convexe sur $[0,T]$.

c) Supposons que $T \in I_+$ satisfait $\underbrace{u(T)^2 - T}_{= v(T)} = \frac{1}{2}$ et est minimal, au sens où $\forall t \in [0,T[$, $u(t)^2 - t \neq \frac{1}{2}$.

Alors puisque v est continue et $v(0) = 1$, $T > 0$ et $[0,T]$ n'est pas réduit à un singleton. De plus, $\forall t \in]0,T[$, $v(t) > \frac{1}{2}$. En effet, s'il existait $t_0 \in]0,T[$ tq $v(t_0) < \frac{1}{2}$, par le théorème des valeurs intermédiaires il existerait $t_1 \in]t_0,T[$ tq $v(t_1) = \frac{1}{2}$, ce qui contredit la minimalité de T.

Ainsi $\forall t \in [0,T[$, $v(t) > \frac{1}{2}$, et $v(T) = \frac{1}{2}$, donc $v'(T) \leq 0$, c'est-à-dire $2u'(T)u(T) - 1 \leq 0$.
Mais d'autre part, $u'(T) = u(T)^2 - T = \frac{1}{2}$ donc l'inégalité précédente donne $u(T) \leq 1$, ce qui est absurde car u est strictement croissante sur $]0,T[$ (d'après la question b), puisque $u(t)^2 - t > \frac{1}{2}$, $\forall t \in]0,T[$) et $u(0) = 1$.

D'où un tel T ne peut exister, et $\forall t \in I_+$, $v(t) = u(t)^2 - t \neq \frac{1}{2}$. Par continuité de v et le fait que $v(0) = 1$, nécessairement $\forall t \in I_+$, $u(t)^2 - t > \frac{1}{2}$, et donc d'après la question b), u est strictement convexe sur I_+.

3) a) La méthode d'Euler donne

$$u_0 = 1 \quad = u(0)$$

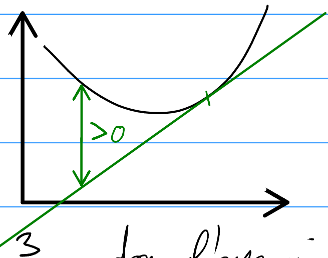
$$u_1 = u_0 + h\,F(0,u_0) = 1 + \frac{1}{2}\left(u_0^2 - 0\right) = \frac{3}{2} \quad \simeq u\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$u_2 = u_1 + h\,F(t_1,u_1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{7}{8} = \frac{19}{8} \quad \simeq u(1)$$

$$u_{-1} = u_0 - h\,F(0,u_0) = 1 - \frac{1}{2}\left(u_0^2 - 0\right) = \frac{1}{2} \quad \simeq u\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$u_{-2} = u_{-1} - h\,F(t_{-1},u_{-1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \quad \simeq u(-1)$$

b) D'après 2)b, u est strictement convexe sur I_+, donc son graphe est strictement au-dessus de ses tangentes en chaque point (en-dehors du point en question)



Equation de la tangente en 0 :

$y = u'(0)(x-0) + u(0) = x+1$

Donc $\forall t \in I_+ \setminus \{0\}$, $u(t) > 1+t$.

Pour $t = \frac{1}{2}$, on obtient $u(\frac{1}{2}) > 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Or $u_1 = \frac{3}{2}$, donc l'approximation est par défaut (càd sous-estimée).

En $t=1$, on trouve $u(1) > 2$, mais ceci ne permet pas de dire si u_2 est une approximation de $u(1)$ par excès ou défaut, car $u_2 = \frac{19}{8} > 2$.

On peut essayer de comparer à la tangente en $\frac{1}{2}$ (même si on ne sait pas la calculer exactement).

Eq de la tangente en $\frac{1}{2}$: $\quad y = u'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + u\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi $\forall t \in I \setminus \{1/2\}$, $\quad u(t) > u'\left(\frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right) + u\left(\frac{1}{2}\right) \quad (1)$

Or
$$u'\left(\frac{1}{2}\right) = u\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$
car $u\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{3}{2}$ comme on l'a vu
$$> \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{7}{4}$$

D'où (1) donne $\forall t \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, $\quad u(t) > \frac{7}{4}\left(t - \frac{1}{2}\right) + \underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{car } u\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{3}{2}} = \frac{7}{4}t + \frac{5}{8}$

En $t=1$ on trouve $u(1) > \frac{19}{8}$,

d'où u_2 est une approximation par défaut de $u(1)$.

c) On trouve $u_0 = 1$

$$u_{\frac{1}{2}} = u_0 + \frac{h}{2} F(t_0, u_0) = 1 + \frac{1}{4}\left(1^2 - 0\right) = \frac{5}{4}.$$

$$p_0 = F\left(t_0 + \frac{h}{2}, u_{\frac{1}{2}}\right) = F\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} \simeq 1,313$$

$$u_1 = u_0 + h\, p_0 = 1 + \frac{1}{2} p_0 \simeq 1,656 > \frac{3}{2} \quad \text{(minorant trouvé précédemment)}$$

$$u_{\frac{3}{2}} = u_1 + \frac{h}{2} F(t_1, u_1) \simeq 2,217$$

$$p_1 = F\left(t_1 + \frac{h}{2}, u_{\frac{3}{2}}\right) \simeq 4,165$$

$$u_2 = u_1 + h p_1 = u_1 + \frac{1}{2} p_1 \simeq 3,739 > \frac{19}{8} \quad (\simeq 2,375)$$

4) a) Euler : $x_{i+1} = x_i + h F(t_i, x_i)$

Si on applique une itération de la méthode d'Euler à partir de x_{i+1} avec un pas $(-h)$, on obtient la valeur
$$\tilde{x}_i = x_{i+1} - h F(t_{i+1}, x_{i+1})$$
$$= x_i + h\Big(F(t_i, x_i) - F\big(t_i + h, x_i + h F(t_i, x_i)\big)\Big)$$

On trouverait $\tilde{x}_i = x_i$ si $F(t_i, x_i) = F\big(t_i + h, x_i + h F(t_i, x_i)\big)$, mais il n'y a pas de raison que ce soit le cas en général.

b) Partons de $x_0 = 1$, puis appliquons Euler avec le pas $h = \frac{1}{2}$
$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}\left(1^2 - 0\right) = \frac{3}{2},$$

puis appliquons Euler depuis x_1 avec le pas $h = -\frac{1}{2}$
$$\tilde{x}_0 = x_1 - \frac{1}{2} F(t_1, x_1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} \neq x_0.$$