TD 7 Ex3

1) a) Posant $p = x'$, on a $\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -x \end{pmatrix}$ car $x'' + x = 0$

$$= \begin{pmatrix} p \\ -x \end{pmatrix}.$$

Or $H(x,p) = \frac{1}{2}(x^2+p^2)$ donc $\partial_x H(x,p) = x$ $\partial_p H(x,p) = p$

donc $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_p H(x(t),p(t)) \\ -\partial_x H(x(t),p(t)) \end{pmatrix}$. (5)

b) Soit (x,p) une solution de (5) sur $\mathbb{R}$.

Calculons $\frac{d}{dt} H(x(t),p(t)) = x'(t)\partial_x H(x(t),p(t)) + p'(t)\partial_p H(x(t),p(t))$

$= -x'(t)p'(t) + p'(t)x(t) = 0$ d'après (5).

D'où $t \mapsto H(x(t),p(t))$ est constante sur $\mathbb{R}$, et en particulier

$\forall t \in \mathbb{R}$ $H(x(t),p(t)) = H(x(0),p(0)) = H(x_0,p_0)$.

2) a) Soit $h>0$. Le système s'écrit $(x,p)' = F(t,(x,p))$

où $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(t,(x,p)) \longmapsto (p,-x)$

Appliquons le schéma d'Euler explicite : partant de (x_0,p_0) on construit par récurrence

$$\begin{aligned}(x_{n+1},p_{n+1}) &= (x_n,p_n) + hF(t_n,(x_n,p_n)) \\ &= (x_n,p_n) + h(p_n,-x_n) \\ &= (x_n + hp_n,\ p_n - hx_n).\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}H(x_{n+1},p_{n+1}) &= \frac{1}{2}\left(x_{n+1}^2 + p_{n+1}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((x_n+hp_n)^2 + (p_n-hx_n)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_n^2 + h^2p_n^2 + \cancel{2h\,x_np_n} + p_n^2 + h^2x_n^2 - \cancel{2h\,p_nx_n}\right) \\ &= \frac{(1+h^2)}{2}\left(x_n^2+p_n^2\right) = (1+h^2)\,H(x_n,p_n)\end{aligned}$$

Ainsi par une récurrence facile on trouve $H(x_n, p_n) = (1+h^2)^n H(x_0, p_0)$.

c) On remarque que $\frac{1}{2}\|(x_n, p_n)\|_2^2 = H(x_n, p_n) \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$

Ceci n'est pas satisfaisant : on voudrait que $H(x_n, p_n)$ soit constant ou au moins borné car $t \mapsto \|(x(t), p(t))\|_2$ est constante si (x, p) est sol de (5).

d) Partant de (x_0, p_0) on construit par le schéma d'Euler implicite

$$\begin{aligned}(x_{n+1}, p_{n+1}) &= (x_n, p_n) + hF(t_{n+1}, (x_{n+1}, p_{n+1})) \\ &= (x_n, p_n) + h(p_{n+1}, -x_{n+1})\end{aligned}$$

donc $((1+h)x_{n+1}, (1-h)p_{n+1}) = (x_n, p_n)$.

d'où

$$(x_{n+1}, p_{n+1}) = \left(\frac{x_n}{1+h}, \frac{p_n}{1+h}\right).$$

Calculons $H(x_n, p_n) = (1+h^2) H(x_{n+1}, p_{n+1})$, donc $H(x_n, p_n) = \frac{H(x_0, p_0)}{(1+h^2)^n}$.

Ici $\frac{1}{2}\|(x_n, p_n)\|_2^2 = H(x_n, p_n) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$, ce qui n'est pas satisfaisant non plus.

3) a) En utilisant les inégalités

$$xp \leq \frac{1}{2}(x^2 + p^2) \quad \text{et} \quad -xp \leq \frac{1}{2}(x^2+p^2)$$

on obtient facilement

$$\left(1-\frac{h}{2}\right) H(x,p) \leq H_{num}(x,p,h) \leq \left(1+\frac{h}{2}\right) H(x,p).$$

b) $(x_{n+1}, p_{n+1}) = (x_n, p_n) + h\,(p_n, -x_{n+1})$

donc $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h p_n \\ p_{n+1} = p_n - h\, x_{n+1} = p_n - h(x_n + h p_n) = (1-h^2)p_n - h\, x_n \end{cases}$

donc on peut bien construire les (x_n, p_n) par récurrence.

c) Calculons

$$H_{num}(x_{n+1}, p_{n+1}, h) = \frac{1}{2}\left(x_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 + h\, x_{n+1} p_{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big((x_n + h p_n)^2 + ((1-h^2)p_n - h x_n)^2 + h (x_n + h p_n)((1-h^2)p_n - h x_n) \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(x_n^2 + h^2 p_n^2 + 2h x_n p_n + (1-h^2)^2 p_n^2 \cancel{+ h^2 x_n^2} - 2h(1-h^2)p_n x_n + h(1-h^2) x_n p_n + h^2(1-h^2)p_n^2 \cancel{- h^2 x_n^2} - h^3 p_n x_n \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(x_n^2 + p_n^2\big(\cancel{h^2} + 1 \cancel{+ h^4} \cancel{- 2h^2} \cancel{+ h^2} \cancel{- h^4}\big) + \big(\cancel{2h} \cancel{- 2h} \cancel{+ 2h^3} + h \cancel{- h^3} \cancel{- h^3}\big) p_n x_n \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n^2 + p_n^2 + h p_n x_n \right) = H_{num}(x_n, p_n, h).$$

D'où $H_{num}(x_n, p_n, h) = H_{num}(x_0, p_0, h)$.

D'après la question 2)a), ceci montre au passage que $H(x_n, p_n)$ est "presque constant" ($\simeq H_{num}(x_n, p_n, h) = H_{num}(x_0, p_0, h) \simeq H(x_0, p_0)$ si h est petit !).

d) Le schéma symplectique étant

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ p_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} p_n \\ -x_{n+1} \end{pmatrix}$$

L'erreur de consistance est

$$e_n = \left\| \begin{pmatrix} x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\, p(t_n) \\ p(t_{n+1}) - p(t_n) + h\, x(t_{n+1}) \end{pmatrix} \right\|$$ où $\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$ est solution de (5)

donc

$$e_n = \left\| \begin{pmatrix} x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\, x'(t_n) \\ x'(t_{n+1}) - x'(t_n) - h\, x''(t_{n+1}) \end{pmatrix} \right\|$$ car $x' = p$ et $x'' = -x$.

On se place sur $[0, T]$, $h = \frac{T}{N}$, $t_n = n h$.

Comme $x \in C^3(\mathbb{R})$, par Taylor il existe τ_n et $\tilde{\tau}_n \in]t_n, t_{n+1}[$ tq

$$x(t_{n+1}) = x(t_n + h) = x(t_n) + h\, x'(t_n) + \frac{h^2}{2} x''(\tau_n) \qquad (*)$$

et $x'(t_{n+1}) = x'(t_n+h) = x'(t_n) + h\,x''(t_n) + \frac{h^2}{2}\,x^{(3)}(\tilde{\tau}_n)$ (**)

Par (*) on a $\left|x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\,x'(t_n)\right| \leq \frac{h^2}{2}\left|x''(\tau_n)\right| \leq \frac{h^2}{2}\left(\sup_{t\in[0,T]} |x''(t)|\right)$

et par (**) on a $\left|x'(t_{n+1}) - x'(t_n) - h\,x''(t_n)\right| \leq \frac{h^2}{2}\left|x^{(3)}(\tilde{\tau}_n)\right| \leq \frac{h^2}{2}\left(\sup_{t\in[0,T]} |x^{(3)}(t)|\right)$

D'où $\|e_n\|_2 \leq M h^2$ où M est une constante indépendante de n et h.

Ainsi la méthode d'Euler symplectique est au moins d'ordre 1.

~~Hors programme~~ ?

On peut montrer que le schéma est stable, c'est-à-dire que si $(x_n, p_n)_{n\in\{0,\dots,N\}}$ est défini par le schéma et si $(\tilde{x}_n, \tilde{p}_n)_{n\in\{0,\dots,N\}}$ satisfait $\left\|\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n - h\,\tilde{p}_n \\ \tilde{p}_{n+1} - \tilde{p}_n + h\,\tilde{x}_{n+1}\end{pmatrix}\right\| \leq \varepsilon_n$, $\forall n \in \{0,\dots,N-1\}$, alors

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|(x_n, p_n) - (\tilde{x_n}, \tilde{p_n})\| \leq \Pi_1 \|(x_0, p_0) - (\tilde{x_0}, \tilde{p_0})\| + \Pi_2 \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_n ,$$

où Π_1, Π_2 sont des constantes ne dépendant pas des ε_n, $\tilde{x_n}$ et $\tilde{p_n}$.

D'après le théorème de Lax, un schéma consistant et stable est convergent.

Ainsi le schéma d'Euler symplectique est convergent.