Correction de l'exercice 2 de la feuille TD 7 [Les méthodes d'Euler dans le cas linéaire]

Préambule (Méthode d'Euler implicite) Etant donnée une équation différentielle $x' = f(t,x)$ où f est de classe C^1, la méthode d'Euler implicite consiste à poser

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}). \end{cases}$$

Ainsi, la deuxième équation fournit implicitement y_{i+1}.

On s'intéresse dans cet exercice aux méthodes d'Euler explicite et implicite pour la résolution d'un problème de Cauchy linéaire dans $\mathbb{R}^d$ de la forme

$$y' = Ay; \quad y(0) = y_0. \tag{1}$$

On considère un pas $h > 0$ et on note $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$. On note $Y_h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^d$ la solution approchée affine par morceaux obtenue et $y_n^h = Y_h(nh)$ les points calculés par la méthode d'Euler.

1. **Le cas scalaire.** On suppose $d = 1$.
   (a) *Calculer explicitement la famille de fonctions $Y_h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ données par la méthode d'Euler explicite et vérifier (à la main) sur cet exemple la convergence uniforme de cette méthode sur tout segment $[0, T]$.*
   Rappelons $y_n^h = Y_h(nh)$. On a par définition

$$y_{n+1}^h = y_n^h + h.Ay_n^h = (1 + hA)y_n^h$$

donc $y_n^h = (1 + hA)^n y_0$. Comme Y_h est le prolongement affine par morceaux de l'application $t_n \mapsto y_n^h$, on en déduit que

$$\boxed{Y_h(t) = y^h_{[\frac{t}{h}]} + (t - h[\tfrac{t}{h}])\left(y^h_{[\frac{t}{h}]+1} - y^h_{[\frac{t}{h}]}\right) = (1 + hA)^{[\frac{t}{h}]}(1 + (t - h[\tfrac{t}{h}])hA)y_0}$$

On fait tendre h vers 0. On a alors

$$\ln\left((1 + hA)^{[\frac{t}{h}]}\right) = [\frac{t}{h}]\ln(1 + hA) = [\frac{t}{h}]\left(hA - \frac{h^2A^2}{2(1 + \theta hA)}\right)$$

où $\theta \in]0, 1[$ par la formule de Taylor-Lagrange appliquée à $x \mapsto \ln(1 + x)$ en 0.
Comme $\frac{t}{h} - 1 < [\frac{t}{h}] \le \frac{t}{h}$, on obtient pour $A > 0$

$$(t - h)\left(A - \frac{hA^2}{2}\right) \le \ln\left((1 + hA)^{[\frac{t}{h}]}\right) \le t\left(A - \frac{hA^2}{2(1 + hA)}\right)$$

et pour $A < 0$ et $h < \frac{1}{-A}$

$$t\left(A - \frac{hA^2}{2}\right) \le \ln\left((1 + hA)^{[\frac{t}{h}]}\right) \le (t - h)\left(A - \frac{hA^2}{2(1 + hA)}\right)$$

Si $t \in [0, T]$, on en déduit pour $A > 0$ que

$$\exp\left(h(-\frac{TA^2}{2} - A + h\frac{A^2}{2})\right) \le (1 + hA)^{[\frac{t}{h}]}e^{-tA} \le 1$$

et pour $A < 0$ que

$$\exp\left(-h\frac{TA^2}{2}\right) \le (1 + hA)^{[\frac{t}{h}]}e^{-tA} \le 1$$

d'où la convergence uniforme sur $[0, T]$ de $t \mapsto (1 + hA)^{[\frac{t}{h}]}$ vers e^{tA}. Comme de plus

$$|(1 + (t - h[\frac{t}{h}])hA) - 1| = |t - h[\frac{t}{h}])hA| \le |Ah^2|,$$

on en déduit la convergence uniforme quand $h \to 0$ de $Y_{h|[0,T]}$ vers $t \mapsto e^{tA}y_0$ qui est bien la solution de l'équation différentielle (1) de condition initiale $y(0) = y_0$.

(b) *Même question pour le méthode d'Euler implicite.* Cette fois, on a

$$y_{n+1}^h = y_n^h + h.Ay_{n+1}^h$$

donc

$$y_{n+1}^h = (1-hA)^{-1}y_n^h$$

Cette formule n'a de sens que si $Ah \neq 1$, mais on peut omettre la valeur $h = \frac{1}{A}$ puisqu'on s'intéresse au cas où h tend vers 0.

On a donc $y_n^h = (1-hA)^{-n}y_0$, d'où

$$\boxed{Y_h(t) = y_{[\frac{t}{h}]}^h + (t - h[\tfrac{t}{h}])\left(y_{[\frac{t}{h}]+1}^h - y_{[\frac{t}{h}]}^h\right) = (1-hA)^{-[\frac{t}{h}]}(1 + (t-h[\tfrac{t}{h}])\tfrac{hA}{1-hA})y_0}$$

On a déjà montré dans la question précédente la convergence uniforme sur $[0,T]$ de $t \mapsto (1-hA)^{-[\frac{t}{h}]}$ vers $t \mapsto e^{tA}$ et on a

$$|1 + (t - h[\frac{t}{h}])\frac{hA}{1-hA}) - 1| \leq h|\frac{hA}{1-hA}|$$

d'où la convergence uniforme quand $h \to 0$ de $Y_{h[0,T]}$ vers $t \mapsto e^{tA}y_0$.

(c) *On suppose que $y_0 \geq 0$. Discuter, suivant les valeurs des paramètre $A \in \mathbb{R}$ et h, les signes des (y_n^h) pour les deux méthodes utilisées. Quelle conclusion en tirez-vous ?*

On rappelle que la solution exacte $t \mapsto y_0e^{tA}$ est à valeurs positives.

— Pour la méthode d'Euler explicite, on a calculé : $y_n^h = (1+hA)^n y_0$. Aussi, si $A \geq 0$, y_n^h est toujours positif. Par contre, si $A < 0$, tant que $h > \frac{1}{|A|}$, y_{2n+1}^h est négatif.

— Pour la méthode d'Euler implicite, on a calculé : $y_n^h = (1-hA)^{-n}y_0$. Aussi, si $A \leq 0$, y_n^h est toujours positif. Par contre, si $A > 0$, tant que $h > \frac{1}{A}$, y_{2n+1}^h est négatif.

Aussi, si $A < 0$, la méthode d'Euler explicite semble plus adaptée pour refléter le signe, alors que pour $A > 0$, il vaut mieux utiliser la méthode d'Euler implicite.

2. **Le cas défini négatif.** On revient au cas général $d \geq 1$ et on suppose que A est symétrique définie négative.

(a) *Montrer (avec un minimum de calculs) que la solution exacte de (1) est bornée sur $[0,+\infty[$.*

On sait que la solution de (1) est donnée par $y(t) = \exp(tA)y_0$. Comme A est symétrique, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ avec $\lambda_i < 0$. On a alors

$$\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & \ldots & \ldots\ldots & \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & e^{t\lambda_d} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t\lambda_i} = 0$, l'application $t \in [0,+\infty[\mapsto e^{tA}y_0$ est continue et de limite nulle en $+\infty$, elle est donc bornée.

(b) *Montrer que la méthode d'Euler implicite pour ce problème est parfaitement définie pour toute valeur du pas du temps.*

On a $y_{n+1}^h = y_n^h + h.Ay_{n+1}^h =$ donc $(\mathbf{1} - hA)y_{n+1}^h = y_n^h$.

Comme A est définie négative, $\mathbf{1} - A$ est définie positive donc inversible et on a

$$y_{n+1}^h = (1-hA)^{-1}y_n^h$$

d'où $y_n^h = (\mathbf{1} - hA)^{-n}y_0$.

(c) *Montrer que les solutions approchées (Y_h) obtenue par cette méthode implicite sont bornées.*

Fixant $h > 0$, on va trouver une constante $M_h \geq 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|y_n^h\| = \|Y_h(t_n)\|_2 \leq M_h.$$

Comme chaque valeur $Y_h(t)$ s'écrit comme un barycentre des y_n^h, on en déduira que

$$\forall t \in [0,+\infty[, \|Y_h(t)\|_2 \leq M_h.$$

On a calculé $y_n^h = (\mathbf{1} - hA)^{-n}y_0$. Si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres (strictement négatives) de A et $\lambda = \inf\{|\lambda_i|; 1 \leq i \leq d\}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \|(\mathbf{1} - hA)^{-1}x\|_2 \leq (1+\lambda h)^{-1}\|x\|_2.$$

D'où on déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|y_n^h\|_2 \leq \frac{\|y_0\|_2}{(1+\lambda h)^n}.$$

La limite du terme de droite quand $n \to \infty$ étant nulle, la suite (y_n^h) est bien bornée.

(d) *Montrer que la famille (Y_h) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la solution exacte.*
Pour chaque $t \in [0, +\infty[$, on a

$$\boxed{Y_h(t) = y^h_{[\frac{t}{h}]} + (t - h[\tfrac{t}{h}])\left(y^h_{[\frac{t}{h}]+1} - y^h_{[\frac{t}{h}]}\right) = (\mathbf{1} - hA)^{-[\frac{t}{h}]}(1 + (t - h[\tfrac{t}{h}])hA(\mathbf{1} - hA)^{-1})y_0}.$$

Soit P une matrice orthogonale telle que $P^{-1}AP = D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ avec $\lambda_i < 0$. Alors, si on note $Z_y(t) = P^{-1}Y_h(t)$ et $z_n = P^{-1}y_n$, on a

$$\boxed{Z_h(t) = z^h_{[\frac{t}{h}]} + (t - h[\tfrac{t}{h}])\left(z^h_{[\frac{t}{h}]+1} - z^h_{[\frac{t}{h}]}\right) = (\mathbf{1} - hD)^{-[\frac{t}{h}]}(1 + (t - h[\tfrac{t}{h}])hD(\mathbf{1} - hD)^{-1})z_0}.$$

Coordonnée par coordonnée, cela donne la formule

$$\boxed{Z_h(t)_j = (1 - h\lambda_j)^{-[\frac{t}{h}]}(1 + (t - h[\tfrac{t}{h}])\tfrac{h\lambda_j}{1-h\lambda_j})z_{0,j}}.$$

Cette famille a déja été étudiée en question 1(b), elle converge uniformément vers $t \mapsto e^{t\lambda_j}z_{0,j}$ sur tout intervalle $[0, T]$ quand h tend vers 0. On en déduit la convergence uniforme de Z_h vers la solution exacte sur tout intervalle $[0, T]$.
On veut montrer la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un $T > 0$ et $\alpha > 0$ tels que (on reprend pour λ la même notation que dans la question 2 (c)) :
— $\forall t \geq T, \|y(t)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
— $\forall h \in]0, \alpha[, \frac{\|y_0\|_2}{(1+\lambda h)^{[\frac{T}{h}]}} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit alors $\beta \in]0, \alpha[$ tel que

$$\forall h \in]0, \beta[, \forall t \in [0, T], \|Y_h(t) - e^{tA}y_0\|_2 < \varepsilon.$$

Alors, si $t \geq T$, on a

$$\forall h \in]0, \beta[, \|Y_h(t) - e^{tA}y_0\|_2 \leq \|Y_h(t)\|_2 + \|e^{tA}y_0\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a donc montré la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

3. **(Le cas antisymétrique)** On suppose que A est antisymétrique réelle.

(a) *Montrer que la norme euclidienne de la solution exacte de (1) est constante.*
Soit $y(t) = e^{tA}y_0$ une solution exacte de (1). Rappelons que comme A est antisymétrique, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, x.Ax = 0$$

i.e. Ax est orthogonal à x. On en déduit

$$\frac{d\|y(t)\|^2}{dt} = 2Ay(t).y(t) = 0$$

donc la norme de y est constante.

(b) **On suppose de plus que la matrice A est inversible.** *Etudier le comportement des suites $(\|y^h_n\|)$ où les y^h_n sont obtenus par les méthodes d'Euler explicite et implicite. Quels sont vos commentaires ?*
— pour la méthode d'Euler explicite, on a $y^h_{n+1} = y^h_n + hAy^h_n$. Comme y^h_n et Ay^h_n sont orthogonaux, on en déduit que

$$\|y^h_{n+1}\|_2^2 \geq (1 + h^2a^2)\|y^h_n\|_2^2$$

où $a = \|A^{-1}\|^{-1}$. Aussi : $\|y^h_n\|_2 \geq \left(\sqrt{1 + h^2a^2}\right)^n \|y_0\|_2$ tend vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.
— pour la méthode d'Euler implicite, on a $(1 - hA)y^h_{n+1} = y^h_n$ donc par ci-dessus

$$\|y^h_n\|_2^2 \geq (1 + h^2a^2)\|y^h_{n+1}\|_2^2$$

d'où $\|y^h_n\|_2 \leq \left(\sqrt{1 + h^2a^2}\right)^{-n} \|y_0\|_2$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.
On voit bien qu'en temps T long, ni la méthode d"Euler explicite ni la méthode d'Euler implicite ne sont satisfaisantes car pour la première on peut obtenir une norme beaucoup trop grandes et pour la seconde des normes beaucoup trop petites pour des h petits (mais pas trop).

(c) *Montrer que le schéma suivant permet de bien définir (y_n) (de manière implicite).*

$$\forall n \geq 1, \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = A\frac{y_{n+1} + y_n}{2}. \tag{2}$$

Quel est le comportement, dans ce cas, de la suite $(\|y_n\|)$? L'équation (2) est équivalente à

$$(2\mathbf{1} - hA)y_{n+1} = (2\mathbf{1} + hA)y_n.$$

Comme A est antisymétrique, elle n'a pas de valeur propre réelle et donc $2\mathbf{1} - hA$ est inversible, ce qui permet de définir

$$y_{n+1} = (2\mathbf{1} - hA)^{-1}(2\mathbf{1} + hA)y_n.$$

Comme A est antisymétrique, on a

$$^t\left((2\mathbf{1} - hA)^{-1}(2\mathbf{1} + hA)\right) = (2\mathbf{1} - hA)(2\mathbf{1} + hA)^{-1} = \left((2\mathbf{1} + hA)(2\mathbf{1} - hA)^{-1}\right)^{-1}.$$

Et comme les matrices A et $\mathbf{1}$ commutent :

$$^t\left((2\mathbf{1} - hA)^{-1}(2\mathbf{1} + hA)\right) = \left((2\mathbf{1} - hA)^{-1}(2\mathbf{1} + hA)\right)^{-1}.$$

La matrice $(2\mathbf{1} - hA)^{-1}(2\mathbf{1} + hA)$ est donc orthogonale, elle préserve la norme euclidienne et la suite $(\|y_n\|)$ est constante.

(d) *Définir et estimer l'erreur de consistance pour le schéma (2). Quel est son ordre ?*
L'erreur de consistance est

$$e_n = e^{hA}y_n - y_{n+1} = \left(e^{hA} - (\mathbf{1} - \frac{h}{2}A)^{-1}(\mathbf{1} + \frac{h}{2}A)\right)y_n.$$

On a par l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\|e^{hA} - \mathbf{1} - hA - \frac{h^2}{2}A^2\|_2 \leq C\|h\|_2^3. \tag{3}$$

D'autre part,

$$\|\left(\mathbf{1} - \frac{h}{2}A\right)^{-1}(\mathbf{1} + \frac{h}{2}A) - (\mathbf{1} + \frac{h}{2}A)(1 + \frac{h}{2}A + \left(\frac{h}{2}\right)^2 A^2)\| \leq C\|h\|_2^3$$

d'où

$$\|\left(\mathbf{1} - \frac{h}{2}A\right)^{-1}(\mathbf{1} + \frac{h}{2}A) - (\mathbf{1} + hA + \frac{h^2}{2}A^2)\| \leq C\|h\|_2^3. \tag{4}$$

On déduit de (3) et (4) que

$$\|e_n\| \leq C'\|h\|_2^3\|y_n\|.$$

La méthode est donc d'ordre 2, ce qui est mieux que les méthodes d'Euler dont on sait qu'elles sont d'ordre 1.