$\boxed{\text{TD7}}$ Ex1

1) Si u est une solution de (1) tq $u(t_0) = x_0$ sur I, alors $\forall t \in I$, $u'(t) = g(t)$, donc en intégrant :

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} u'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds,$$

c'est-à-dire $\boxed{u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds.}$

a) Comme vu en cours, la méthode d'Euler explicite est consistante (d'ordre 1) et stable. Elle est donc convergente, d'après le théorème de Lax.

b) Appliquons la méthode d'Euler explicite sur $[t_0, t]$ de pas $h = \frac{t-t_0}{n} > 0$.

On définit $\begin{cases} y_0 = u(t_0) = x_0 \\ y_{i+1} = y_i + h\,g(t_i) \end{cases} \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\},$

où $t_i = t_0 + hi$.

On rappelle que y_i est une valeur approchée de $u(t_i)$.
On construit alors la fonction $u_h : [t_0, t] \to \mathbb{R}$ affine par morceaux tq
$u_h(t_i) = y_i$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, c'est-à-dire

$$u_h(s) = y_i + \frac{s - t_i}{h}(y_{i+1} - y_i) \quad \text{si } s \in [t_i, t_{i+1}[.$$

c) On remarque que $y_i = y_{i-1} + h\, g(t_{i-1}) = y_{i-2} + h(g(t_{i-2}) + g(t_{i-1}))$

$$= \dots = y_0 + h \sum_{k=0}^{i-1} g(t_k)$$

$$= x_0 + h \sum_{k=0}^{i-1} g(t_k)$$

Ainsi $u_h(t) = y_n = x_0 + h \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)$

$$= x_0 + \underbrace{\frac{t - t_0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(t_0 + \frac{t - t_0}{n} k\right)}_{S_n(g, \sigma) : \text{ Somme de Riemann de } f \text{ pour la subdivision à pas constant } \sigma = t_0 < t_0 + h < \dots < t_0 + nh = t.}$$

On sait que si g est continue, $S_n(g,\sigma) \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{t_0}^{t} g(s)ds$,

d'où $u_h(t) \xrightarrow{h\to 0} x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)ds = u(t)$.

On retrouve le fait que la méthode d'Euler est convergente dans ce cas particulier.

2) On rappelle la méthode du point milieu sur $[t_0,t]$, de pas $h = \frac{t-t_0}{n}$.

On définit $y_0 = u(t_0)$, puis par récurrence

approximation de $u(t_i + \frac{h}{2})$

approx de $u'(t_i + \frac{h}{2}) = F(t_i + \frac{h}{2}, u(t_i + \frac{h}{2}))$

$$\begin{cases} y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} F(t_i, y_i) \\ p_i = F\left(t_i + \frac{h}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ y_{i+1} = y_i + h p_i \end{cases}$$

où $t_i = t_0 + hi$.

pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$

On définit ensuite par interpolation affine $v_h : [t_0, t] \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $v_h(t_i) = y_i$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$.

Ici $y_0 = x_0$

$$\begin{cases} y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} g(t_i), \\ p_i = g\left(t_i + \frac{h}{2}\right) \longleftarrow \text{ne dépend pas de } y_{i+\frac{1}{2}} \text{ car } F(t,x) = g(t) \text{ ne dépend pas de } x. \\ y_{i+1} = y + h p_i = y_i + h\, g\left(t_i + \frac{h}{2}\right) \end{cases}$$

3) On a $y_i = y_{i-1} + h g\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}\right) = y_{i-2} + h\left(g\left(t_{i-2} + \frac{h}{2}\right) + g\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right)$

$$= y_0 + h \sum_{k=0}^{i-1} g\left(t_k + \frac{h}{2}\right)$$

et $v_h(t) = y_n = y_0 + h \sum_{k=0}^{n-1} g\left(t_k + \frac{h}{2}\right) = x_0 + \underbrace{\frac{t - t_0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(t_0 + \frac{t-t_0}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)}_{\Sigma_n(g, \sigma)}$

où $\Sigma_n(g,\sigma)$ est la somme de Riemann de g associée à la subdivision de pas constant $\sigma = t_0 < t_{1/2} < t_1 < t_{3/2} < \dots < t_{n-\frac{1}{2}} < t_n = t$

D'où $\Sigma_n(g,\sigma) \xrightarrow{n\to+\infty} \displaystyle\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$

et $v_h(t) \xrightarrow{h\to 0} x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds = u(t)$.

↳ Convergence ("ponctuelle") de la méthode du point milieu.