Correction exo 5 feuille 6

March 31, 2020

Première question

- Soit le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}_+$ défini par

$$\begin{cases} y' = ty \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- C'est un problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire scalaire homogène à coefficients continus.
- Il y a donc une unique solution sur $[0, +\infty[$.
- Son expression est $y(t) = y(0) \exp\left(\int_0^t s ds\right)$ donc

$$\boxed{y(t) = \exp \frac{t^2}{2}.}$$

- Soit $t > 0$. On applique sur $[0, T]$ la méthode d'Euler de pas $h = \frac{T}{N}$.
- On pose donc $y_0 = 1$ et pour $n \in [0, N-1]$

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h t_n y_n \end{cases}$$

- Donc pour $n \in [0, N]$, on a

$$y_{n+1} = (1 + n\frac{T^2}{N^2})y_n.$$

- Puis on définit la fonction $\bar{y}_N : [0, T] \to \mathbb{R}$ affine par morceaux telle que $\bar{y}_N(t_n) = y_n$, pour tout $n \in [0, N]$. D'où

$$\bar{y}_N(T) = y_N = \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{nT^2}{N^2}\right).$$

troisième question

- Pour $\alpha \in (0,1)$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est concave, elle est donc en-dessous de sa tangente en 0, c'est-à-dire $(1+x)^\alpha \leq y(0) + xy'(0) = 1 + \alpha x$.
- Appliquant ceci avec $\alpha = \frac{n}{N} < 1$ et $x = \frac{T^2}{N}$, on trouve

$$\left(1 + \frac{T^2}{N}\right)^{\frac{n}{N}} \leq 1 + \frac{nT^2}{N^2}.$$

- Pour $\alpha > 1$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est convexe, elle est donc au-dessus de sa tangente en 0, c'est-à-dire $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.
- Appliquant ceci avec $\alpha = n \geq 1$ et $x = \frac{T^2}{N^2}$, on trouve

$$\left(1 + \frac{T^2}{N^2}\right)^{n} \geq 1 + \frac{nT^2}{N^2}.$$

quatrième question

- On déduit des questions 2 et 3 que

$$\prod_{n=0}^{N-1}\left(1+\frac{T^2}{N}\right)^{\frac{n}{N}} \leq \bar{y}_N(T) \leq \prod_{n=0}^{N-1}\left(1+\frac{T^2}{N^2}\right)^{n}$$

- Comme $\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{N(N-1)}{2}$, on obtient

$$\left(1+\frac{T^2}{N}\right)^{\frac{N-1}{2}} \leq \bar{y}_N(T) \leq \left(1+\frac{T^2}{N^2}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}}.$$

- Le terme de droite et de gauche tendant vers $e^{\frac{T^2}{2}}$, on a bien

$$y(T) = \lim_{N\to+\infty} \bar{y}_N(T).$$