Exercice 3 feuille 6 — EDO L6

On définit sur le complémentaire de l'axe des z le champ de vecteurs

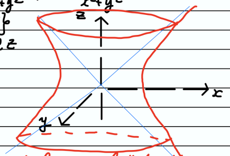
$$(x,y,z) \xmapsto{f} \left(-y - \frac{xz}{x^2+y^2},\ x - \frac{yz}{x^2+y^2},\ -1\right).$$

1°) Soit $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=1\}$

V est invariant par rotation d'axe z et sa trace sur le 1/2 plan $y=0$, $x>0$ est la branche d'hyperbole.

$y=0$, $x^2-z^2=1$ ie $(x-z)(x+z)=1$.

Si $(x,y,z)\in V$, on a $x^2+y^2=1+z^2\geq 1$ et donc (x,y,z) est dans l'ensemble de définition de f.



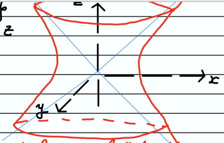
V = hyperboloïde à une nappe.

141 %

1°/ Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

V est invariant par rotation d'axe z et sa trace sur le 1/2 plan $y = 0$, $x > 0$ est la branche d'hyperbole.

$y = 0$, $x^2 - z^2 = 1$ ie $(x-z)(x+z) = 1$.



V = hyperboloïde à une nappe.

Si $(x,y,z) \in V$, on a $x^2 + y^2 = 1 + z^2 \geq 1$ et donc (x,y,z) est dans l'ensemble de définition de f.

2°/ On note $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble de définition de f et $\Delta_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ l'ensemble de vie du flot (φ_t) de f.

On note $H(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Si $I \times \{(x,y,z)\} = I \times \{X\} \subset \Delta_f$ et $t \in I$, on note $\varphi_t(X) = (x_t, y_t, z_t)$.

On a alors

$$\frac{d}{dt} H \circ \varphi_t(X) = 2(x_t x_t' + y_t y_t' - z_t z_t')$$
$$= 2\left[-y_t x_t - \frac{x_t^2 z_t}{x_t^2 + y_t^2} + y_t x_t - \frac{y_t^2 z_t}{x_t^2 + y_t^2} + z_t\right] = 0$$

H est constante le long du flot.

Donc $V = H^{-1}(\{1\})$ est invariant par le flot.

Style du trait
Uniforme
Variable
Rectangle
Ovale
Triangle
Étoile
Polygone
5
Côtés
Trait
Couleur
Largeur
Remplissage de forme
Couleur

141 %

Partage de capture d'écran
Un lien vers votre capture d'écran a été copié dans le presse-papiers.
Uniforme Variable
Rectangle Ovale Triangle
Étoile Polygone 5 Côtés
Trait
Couleur
Largeur
Remplissage de forme
Couleur

2°/ On note $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble de définition de f et Δ_f l'ensemble de vie du flot (φ_t) de f.

On note $H(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$.

Si $I \times \{(x,y,z)\} = I \times \{X\} \subset \Delta_f$ et $t \in I$, on note $\varphi_t(X) = (x_t, y_t, z_t)$.

On a alors

$$\frac{d}{dt} H \circ \varphi_t(x) = 2(x_t x_t' + y_t y_t' - z_t z_t')$$
$$= 2\left[-y_t x_t - \frac{x_t^2 z_t}{x_t^2+y_t^2} + y_t x_t - \frac{y_t^2 z_t}{x_t^2+y_t^2} + z_t\right] = 0$$

H est constante le long du flot.

Donc $V = H^{-1}(\{1\})$ est invariant par le flot.

3°/ Montrons que $\mathbb{R} \times V \subset \Delta_f$. Sinon il existe $X = (x,y,z) \in V$ tel que la solution maximale $t \in I \mapsto \varphi_t(X)$ n'est pas globale. Par exemple, $\operatorname{Sup} I = T_+ < +\infty$.

Notons $\varphi_t(X) = (x(t), y(t), z(t))$. De $z' = 1$, on déduit que $z(t) = z + t$ est à valeurs dans un compact $[-k, k]$ de $\mathbb{R}$. De $x(t)^2 + y(t)^2 = 1 + z(t)^2 \leq 1 + k^2$, on déduit que $(\varphi_t(X))_{t \in [0, T_+[}$ est à valeurs dans un compact de V donc un compact de $\mathcal{D}_f$. Cela contredit $T_+ < +\infty$.

WWW.LAPHOTOCOPIEUSE.COM

141 %

Style du trait
Uniforme Variable
Rectangle Ovale Triangle
Étoile Polygone 5 Côtés
Trait
Couleur
Largeur
Remplissage de forme
Couleur

Exercice 3 feuille 6.

4°/ Si $X=(x,y,z)\in V$, on sait que

$$\forall t\in\mathbb{R},\ (x(t),y(t),z(t)) = \varphi_t(x,y,z)\in V$$

De plus, $z(t)=z(0)-t$. Comme $x(t)^2+y(t)^2 = 1-z(t)^2$ il suffit de connaître la coordonnée polaire angulaire $\theta(t)$ de $(x(t),y(t))$ pour placer $X(t)$ sur V.

Or, on a : $\dot\theta(t) = \dfrac{x\dot y - y\dot x}{x^2+y^2}(t) = -1$ après cal