

Exercice 1 feuille 6 Soit l'équation différentielle scalair

$$x' = x^2. (E)$$

Il s'agit d'une équation autonome.
La fonction $x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2$ est C^1 donc localement Lipschitzienne.
Par le théorème de Cauchy, il existe donc pour $t_0, x_0 \in \mathbb{R}^2$
une unique solution maximale de (E) de C.I. $x(t_0) = x_0$.

Resolvons l'équation.

- si $x_0 = 0$, la solution est la fonction nulle définie sur \mathbb{R} et entière.
- si $x_0 \neq 0$, la solution ne peut pas s'annuler par le théorème de C.V. sep. On peut donc séparer les variables

$$(E') \quad \frac{x'}{x^2} = x \quad \text{qui s'intègre en}$$

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = t - t_0, \text{ donc } x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}.$$

Il s'agit d'une équation autonome.
La fonction $x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2$ est C^1 donc localement Lipschitzienne.
Par le thm de Cayley, il existe donc pour $t \in (t_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$
une unique solution maximale de (E) de CI: $x(t_0) = x_0$.

Resolvons l'équation.

- si $x_0 = 0$, la solution est la fonction nulle définie sur \mathbb{R} et entière.
- si $x_0 \neq 0$, la solution ne peut pas s'annuler par thm de Cayley. On peut donc séparer les variables

$$(E) \quad \frac{x'}{x^2} = -t \quad \text{qui s'intègre en}$$

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = -t - t_0 \quad \text{donc } x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)} \quad \text{pour } t \in]- \infty, t_0 + \frac{1}{x_0}[$$

ou $t \in]t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty[$

En choisissant le flot, qu'on peut définir à l'aide de la condition initiale $x(0) = x_0$ donc:

→ si $x_0 = 0$, on a: $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t, 0) = 0$.

→ si $x_0 > 0$, on a: $\forall t \in]- \infty, \frac{1}{x_0}[$, $\varphi(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$.

→ si $x_0 < 0$, on a: $\forall t \in]\frac{1}{x_0}, +\infty[$, $\varphi(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$.

~~une unique solution de l'équation différentielle $x'(t) = -x(t)$ avec $x(0) = x_0$.~~

- Resolvons l'équation.
- si $x_0 = 0$, la solution est la fonction nulle définie sur \mathbb{R} et entière.
 - si $x_0 \neq 0$, la solution ne peut pas s'annuler par théorème de C.V. dep. On peut donc séparer les variables

$$(\pm) \frac{x'}{x^2} = \pm 1 \text{ qui s'intègre en}$$

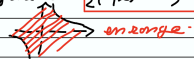
$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = t - t_0 \text{ d'où } x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)} \text{ pour } t \in]- \infty, t_0 + \frac{1}{x_0}[$$

$$\text{ou } t \in]t_0 - \frac{1}{x_0}, +\infty[$$

En cherchant le flot, qu'on peut définir d'aide de la condition initiale $x(0) = x_0$ donc:

- \rightarrow si $x_0 = 0$, on a: $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t, 0) = 0$.
- \rightarrow si $x_0 > 0$, on a: $\forall t \in]- \infty, \frac{1}{x_0}[$, $\varphi(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$.
- \rightarrow si $x_0 < 0$, on a: $\forall t \in]\frac{1}{x_0}, +\infty[$, $\varphi(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$.

Le flot φ est donc défini sur $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2, t \cdot x < 1\}$ qui on représente



Style du trait

Uniforme Variable

Rectangle Ovale Triangle

Etoile Polygone Côtés

Trait

Couleur

Largeur

Remplissage de forme

Couleur

théorème de C4 sep. On peut donc séparer les variables

$$(E) \frac{x'}{x^2} = t \quad \text{qui s'intègre en}$$

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = t - t_0 \quad \text{donc } x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t-t_0)} \quad \text{pour } t \in]-a, t_0 + \frac{1}{x_0}[$$

ou $t \in]t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty[$

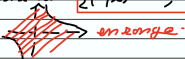
On cherche le flot, qu'on peut définir à l'aide de la condition initiale $x(0) = x_0$ donc:

→ si $x_0 = 0$, on a: $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t, 0) = 0$.

→ si $x_0 > 0$, on a: $\forall t \in]-a, \frac{1}{x_0}[$, $\varphi(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$.

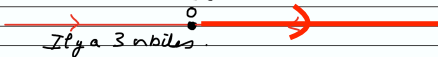
→ si $x_0 < 0$, on a: $\forall t \in]\frac{1}{x_0}, +\infty[$, $\varphi(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$.

Le flot φ est donc défini sur $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2, t \cdot x < 1\}$ qu'on représente



$$\text{par } \varphi(t, x) = \frac{x}{1 - tx}$$

On remarque que quand cette limite a sens, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = 0$.



Style du trait



Uniforme Variable



Rectangle Oval Triangle



Étoile Polygone Cône

Trait

Couleur

Largeur

Remplissage de forme

Couleur