Exercice 2 feuille 6 Soit l'équation différentielle scalaire

$$x' = x^2. \quad (E)$$

Il s'agit d'une équation autonome.
La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est C^1 donc localement lipschitzienne.
Par le thm de C-Lip, il existe donc pour $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ une unique solution maximale de (E) de C.I. $x(t_0) = x_0$.

Résolvons l'équation.

- si $x_0 = 0$, la solution est la fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- si $x_0 \neq 0$, la solution ne peut pas s'annuler par théorème de C-Lip. On peut donc séparer les variables

$$(E') \quad \frac{x'}{x^2} = 1 \quad \text{qui s'intègre en}$$

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = t - t_0, \quad \text{donc} \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}.$$

Il s'agit d'une équation autonome.
La fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$ est C^1 donc localement lipschitzienne.
Par le thm de CL-dip, il existe donc pour $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ une unique solution maximale de (E) de C.I. $x(t_0) = x_0$.

Resolvons l'équation.

- si $x_0 = 0$, la solution est la fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ tt entier.
- si $x_0 \neq 0$, la solution ne peut pas s'annuler par théorème de CL dip. On peut donc séparer les variables

$$(E') \quad \frac{x'}{x^2} = 1 \quad \text{qui s'intègre en}$$

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = t - t_0 \quad \text{d'où} \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)} \quad \text{pour } t \in]-\infty, t_0 + \tfrac{1}{x_0}[\ \text{ou} \ t \in]t_0 + \tfrac{1}{x_0}, +\infty[$$

On cherche le flot, qu'on peut définir à l'aide de la condition initiale $x(0) = x_0$ donc:

→ si $x_0 = 0$, on a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t, 0) = 0$.

→ si $x_0 > 0$, on a : $\forall t \in]-\infty, \frac{1}{x_0}[$, $\varphi(t, x_0) = \dfrac{x_0}{1 - t x_0}$.

→ si $x_0 < 0$, on a : $\forall t \in]\frac{1}{x_0}, +\infty[$, $\varphi(t, x_0) = \dfrac{x_0}{1 - t x_0}$.

une unique solution maximale ... de (E) telle que $x(t_0)=x_0$.

Resolvons l'équation.

• si $x_0=0$, la solution est la fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ tt entier.

• si $x_0\neq 0$, la solution ne peut pas s'annuler par théorème de CL dep. On peut donc séparer les variables

$$(E')\quad \frac{x'}{x^2}=1 \quad \text{qui s'intègre en}$$

$$\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}=t-t_0 \quad \text{d'où} \quad x(t)=\frac{x_0}{1-x_0(t-t_0)} \quad \text{pour } t\in\left]-\infty, t_0+\frac{1}{x_0}\right[\text{ ou } t\in\left]t_0+\frac{1}{x_0},+\infty\right[$$

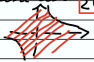
On cherche le flot, qu'on peut définir à l'aide de la condition initiale $x(0)=x_0$ donc:

→ si $x_0=0$, on a: $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi(t,0)=0$.

→ si $x_0>0$, on a: $\forall t\in\left]-\infty,\frac{1}{x_0}\right[$, $\varphi(t,x_0)=\dfrac{x_0}{1-tx_0}$.

→ si $x_0<0$, on a: $\forall t\in\left]\frac{1}{x_0},+\infty\right[$, $\varphi(t,x_0)=\dfrac{x_0}{1-tx_0}$.

Le flot φ est donc défini sur $\boxed{\{(t,x)\in\mathbb{R}^2,\ t.x<1\}}$ qu'on représente



en rouge.

théorème de CL dép. On peut donc séparer les variables

$(E^-)\quad \frac{x'}{x^2} = 1$ qui s'intègre en

$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = t - t_0$ d'où $x(t) = \frac{x_0}{1-x_0(t-t_0)}$ pour $t \in]-\infty, t_0+\frac{1}{x_0}[$ ou $t \in]t_0+\frac{1}{x_0}, +\infty[$

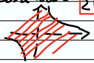
On cherche le flot, qu'on peut définir à l'aide de la condition initiale $x(0)=x_0$ donc:

→ si $x_0 = 0$, on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t,0) = 0$.

→ si $x_0 > 0$, on a : $\forall t \in]-\infty, \frac{1}{x_0}[, \varphi(t,x_0) = \frac{x_0}{1-tx_0}$.

→ si $x_0 < 0$, on a : $\forall t \in]\frac{1}{x_0}, +\infty[, \varphi(t,x_0) = \frac{x_0}{1-tx_0}$.

Le flot φ est donc défini sur $\boxed{\{(t,x) \in \mathbb{R}^2, t \cdot x < 1\}}$ qu'on représente



en rouge.

par $\varphi(t,x) = \frac{x}{1-tx}$.

On remarque que quand cette limite a un sens, $\lim_{t \to \pm\infty} \varphi(t,x) = 0$.

Il y a 3 orbites.