$\boxed{\text{TD 6}}$ Ex 1

0) Le champs de vecteurs f étant complet, le flot associé ϕ_t est défini pour tout temps.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{s+t}(x)$ (*)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $t \mapsto \phi_t(x) \in C^1$, et en dérivant par rapport à s la relation (*), on a

$$D\phi_t(\phi_s(x)) \cdot \left(\frac{d}{ds}\phi_s(x)\right) = \frac{d}{ds}\phi_{s+t}(x)$$

Or $\frac{d}{ds}\phi_s(x) = f(\phi_s(x))$ et $\frac{d}{ds}(\phi_{s+t}(x)) = f(\phi_{s+t}(x))$, donc

$$D\phi_t(\phi_s(x)) \cdot (f(\phi_s(x))) = f(\phi_{s+t}(x)).$$

Prenant cette égalité en $s = 0$, et utilisant $\phi_0(x) = 0$, on obtient

$$D\phi_t(x) \cdot f(x) = f(\phi_t(x)).$$

1) Soit $u(t,x) = g(\phi_t(x))$, où $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

f étant de classe C^1, $(t,x) \mapsto \phi_t(x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, de même que u.

En dérivant par rapport à t, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} u(t,x) = D_g(\phi_t(x)) \cdot \left(\frac{d}{dt}\phi_t(x)\right) = D_g(\phi_t(x)) \cdot f(\phi_t(x))$$

En différenciant par rapport à x, on obtient

$$D_x u(t,x) = Dg(\phi_t(x)) \circ D\phi_t(x),$$

ainsi $\nabla_x u(t,x) \cdot f(x) = D_g(\phi_t(x)) \cdot (D\phi_t(x) \cdot f(x))$ question 0)

$$= D_g(\phi_t(x)) \cdot f(\phi_t(x))$$

D'où $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \nabla_x u(t,x) \cdot f(x)}$ (1)

2) a) Calculons $(u \circ y)'(s) = Du(y(s)) \cdot (y'(s))$ car $y'(s) = F(y(s))$

$$= Du(y(s)) \cdot (F(y(s)))$$ où $y(s) = (\tau(s), \xi(s))$

$$= Du(y(s)) \cdot (-1, f(\xi(s)))$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial t}(\tau(s), \xi(s)) + \nabla_x u(\tau(s), \xi(s)) \cdot f(\xi(s))$$

d'après (1)

$$= -\nabla_x u(\tau(s), \xi(s)) \cdot f(\xi(s)) + \nabla_x u(\tau(s), \xi(s)) \cdot f(\xi(s))$$

$$= 0$$

D'où $u \circ y$ est une fonction constante.

b) On a $\underset{\underset{(\tau'(s), \gamma'(s))}{\parallel}}{y'(s)} = F(y(s)) = F(\tau(s), \gamma(s)) = (-1, f(\gamma(s)))$

d'où $\begin{cases} \tau'(s) = -1 \\ \gamma'(s) = f(\gamma(s)) \end{cases}$

Ainsi posant $y_0 = (\tau_0, \gamma_0) = y(0)$, on a $\begin{cases} \gamma'(s) = f(\gamma(s)) \\ \gamma(0) = \gamma_0 \end{cases}$, de sorte que

γ est le flot associé à f, de donnée initiale γ_0, donc $\gamma(s) = \phi_s(\gamma_0)$ et
γ est défini sur $\mathbb{R}$ car f est un champ de vecteur complet.
De plus $\tau(s) = \tau_0 - s$, donc $y(s) = (\tau_0 - s, \phi_s(\gamma_0))$, $\forall s \in \mathbb{R}$.
Ainsi $y(\tau_0) = (0, \phi_{\tau_0}(\gamma_0))$, qui appartient à l'hyperplan $\tau = 0$.

c) Soit $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.
Soit y la solution maximale au problème de Cauchy $\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = (t, x) \end{cases}$.
Comme on l'a vu dans la question précédente, y est une solution globale, et
$y(t) = (0, \phi_t(x))$.

De plus, $u \circ y$ est constante d'après 2) a), donc

$u(t,x) = u(y(0)) = u(y(t))$, d'où $\boxed{u(t,x) = u(0, \phi_t(x))}$.

Soit u_0 une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, et considérons $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ une solution de (1) tq $u(0,x) = u_0(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
Alors on a vu que $u(t,x) = u(0, \phi_t(x)) = u_0(\phi_t(x))$, de sorte que u ne dépend que de la condition initiale u_0 : $\boxed{\text{unicité}}$.

3) Soit u une solution de $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + a \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0$ tq $u(0,x) = g(x)$.

Alors posant $f(x) = -a$, u est solution de (1) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x} u(t,x) \cdot f(x).$$

D'après 2) c), on a $u(t,x) = u(0, \phi_t(x)) = g(\phi_t(x))$, où ϕ_t est le flot associé à f, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\phi(t,x) = -a \\ \phi(0,x) = x \end{cases}$$

donc $\phi(t,x) = x - at$. D'où $\boxed{u(t,x) = g(x - at)}$.