Exo 6 feuille 5 $\gamma>0$, système avec frottement.

$$(E) \quad x'' = F(x) - \gamma . x' \quad , \quad U(x) = -\int F.$$

1°] $(S)\begin{cases} x' = y \\ y' = F(x) - \gamma . y . \end{cases}$

2°] un equilibre correspond à $(x,y) = \text{cste}$, soit $\begin{cases} y = 0 \\ F(x) - \gamma y = 0 \end{cases}$ ie $(x_0, 0)$ tq $U'(x_0) = 0$, comme ds l'exo 5.

3°] on rappelle que l'énergie est

$$E(x,y) = K(y) + U(x) = \frac{1}{2}y^2 + U(x)$$

Pour $(x,y) : I \to \mathbb{R}^2$ solution, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(E(x(t), y(t))\right) &= y(t) y'(t) + U'(x(t)) x'(t) \\ &= y(t)\left(F(x(t)) - \gamma y(t)\right) - F(x(t)) y(t) \text{ par } (S). \\ &= -\gamma (y(t))^2 \leq 0. \end{aligned}$$

La fonction E est donc décroissante le long des orbites. C'est une fonction de Lyapunov du système.

4°] On suppose que x_0 est un minimum strict de U. On a déjà montré dans l'exo 5 que $(x_0, 0)$ est un minimum strict de E donc E est une fonction de Lyapunov pour l'équilibre $(x_0,0)$ et par le cours, $(x_0,0)$ est stable.

D'après le cours, il suffit que E soit une fonction de Lyapunov stricte pour que l'équilibre $(x_0,0)$ soit localement asymptotiquement stable.

Or, en tout point où $y=0$, on a calculé que $\frac{d}{dt}E(x(t),y(t)) = 0$.

On ne sait donc pas a priori si $(t \mapsto E(x(t), y(t)))$ est strictement décroissante.

5°] On rappelle le système (S) $\begin{cases} x' = y \\ y' = F(x) - \gamma . y . \end{cases}$

La matrice jacobienne du système est $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ F'(x) & -\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -U''(x) & -\gamma \end{bmatrix}$

Le système linéarisé est donc $X' = AX$.

6°] En $(x_0,0)$, le polynôme caractéristique de A est

$P(X) = X^2 + \gamma X + U''(x_0)$. Comme $U''(x_0) \geq 0$,

les deux racines sont soit complexes conjuguées, soit réelles de même signe et le signe des parties réelles est donné par γ, il est négatif. Donc $\Rightarrow$ soit $U''(x_0) = 0$ on ne peut pas conclure

$\Rightarrow$ soit $U''(x_0) > 0$, $(x_0,0)$ est loc. asympt. stable.