Correction exo 8 feuille 5

March 23, 2020

Introduction

- Soit l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_2' = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

- L'équation est automone.
- La fonction

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)). \end{array}$$

  est polynomiale, donc de classe C^1, donc localement lipschitzienne.
- On lui appliquer le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz : à toute condition initiale correspond une unique solution maximale.

première question

- On cherche les équlibres du système, i.e. les $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $F(x_1, x_2) = 0$.

$$\begin{cases} (L_1) & -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ (L_2) & x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases}$$

- On remarque que $(0, 0)$ est solution.
- $x_1 L_1 + x_2 L_2$ donne $(x_1^2 + x^2)(1 - x_1^2 + x_2^2) = 0$, donc soit $(x_1, x_2) = (0, 0)$, soit $x_1^2 + x_2^2 = 1$, ce qui redonne en injectant dans (L_1) et (L_2) que $(x_1, x_2) = (0, 0)$.
- $\boxed{(0, 0) \text{ est donc le seul équilibre du système.}}$

- Nous ne traiterons pas la question 2, pour laquelle il suffit de remplacer.
- On retient que $\boxed{\bar{x}(t) = (\cos t, \sin t)}$ est une solution 2π-périodique.
- L'orbite correspondante est le cercle unité.

troisième question (1)

- Soit $x = (x_1, x_2) : I \to \mathbb{R}^2$ une solution maximale. Notons $\rho(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$.
- $\boxed{\text{si } \rho(0) = 1}$, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1(0), x_2(0)) = (\cos t_0, \sin t_0) = \bar{x}(t_0)$.
  - Comme $\bar{x}$ est solution et que le système est autonome, la fonction $\bar{y} : t \in \mathbb{R} \mapsto \bar{x}(t + t_0)$ est aussi solution.
  - Les solutions x et $\bar{y}$ sont des solutions maximales qui coïncident en $t = 0$, elles sont donc confondues et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \rho(t) = 1.$$

  - $\boxed{\rho \text{ est donc constante.}}$

troisième question (2)

- On rappelle que $\rho(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$.
- $\boxed{\text{si } \rho(0) < 1}$, la fonction ρ est continue sur I et vérifie $\rho(0) < 1$.
  - Si pour un certain $t_0 \in I$ on a $\rho(t_0) > 1$, alors par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_1 \in I$ tel que $\rho(t_1) = 1$.
  - Il existe donc $t_2 \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1(t_1), x_2(t_1)) = (\cos t_2, \sin t_2) = \bar{x}(t_2)$.
  - Alors, si $\bar{z} : t \in \mathbb{R} \mapsto \bar{x}(t + t_2 - t_1)$, les solutions x et $\bar{z}$ coïncident en $t = t_1$. Elles sont donc égales, ce qui contredit $\rho(0) < 1$. On en déduit : $\forall t \in I, \rho(t) < 1$.
  - On calcule $\frac{d\rho^2}{dt} = 2\rho\rho' = 2(x_1x_1' + x_2x_2')$ donc

$$2\rho\rho' = 2\left(x_1\left(-x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)\right) + x_2\left(x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\right)\right);$$

$$2\rho\rho' = 2(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = 2\rho^2(1 - \rho^2) > 0.$$

  - En conclusion, $\boxed{\rho \text{ est croissante à valeurs dans } [0, 1[.}$

troisième question (3)

- On rappelle que $\rho^2(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$.
- $\boxed{\text{si } \rho(0) > 1}$, un argument analogue au cas $\rho(0) > 0$ permet de conclure que $\forall t \in I, \rho(t) > 1$.
  - On en déduit que la dérivée calculée précédemment $\frac{d\rho^2}{dt} = 2\rho^2(1 - \rho^2)$ est strictement négative.
  - En conclusion, $\boxed{\rho \text{ est strictement décroissante à valeurs dans }]1, +\infty[.}$

quatrième question

- On a montré que si $\|x(0)\|^2 = x_1^2(0) + x_2^2(0) < 1$, alors la solution maximale $x : I \to \mathbb{R}^2$ est en fait à valeurs dans le disque unité fermé.
- Le disque unité fermé étant compact, la solution x ne sort pas de tout compact et est donc globale.
- Si $\|x(0)\|^2 = x_1^2(0) + x_2^2(0) > 1$, comme ρ décroit, alors $x_{|I\cap[0,+\infty[}$ est à valeurs dans le disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon $\|x(0)\|$.
- Ce disque étant compact, $x_{|I\cap[0,+\infty[}$ ne sort pas de tout compact et donc $[0,+\infty[\subset I$.

cinquième question

- Soit $x = (x_1, x_2) : I \to \mathbb{R}^2$ une solution maximale qui ne s'annule pas.
- Alors il existe $(\rho, \theta) : I \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $(x_1, x_2) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$
- L'existence de θ, qu'on admet ici, utilise le théorème du relèvement.
- On a déjà vu en question 3 que $2\rho\rho' = 2\rho^2(1-\rho^2) > 0$ i.e. $\rho' = \rho(1-\rho^2)$.
- Pour calculer θ', on remarque que

  $$x_1x_2' - x_2x_1' = \rho\cos\theta(\rho'\sin\theta + \rho\theta'\cos\theta) - \rho\sin\theta(\rho'\cos\theta - \rho\theta'\sin\theta);$$

  donc $x_1x_2' - x_2x_1' = \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\theta' = \rho^2\theta'$.
- et $x_1x_2' - x_2x_1' = x_1\left(x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\right) - x_2\left(-x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)\right) = x_1^2 + x_2^2 = \rho^2$.
- donc $\boxed{\rho' = \rho(1-\rho^2) \text{ et } \theta' = 1.}$

sixième question (1)

- On veut résoudre

$$\begin{cases} \rho' = \rho(1-\rho^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

- qui est un système de deux E.D.O. indépendantes.
- $\theta' = 1$ s'intègre en $\theta(t) = \theta(0) + t$. Les solutions tournent à vitesse angulaire uniforme autour de l'origine.
- $\boxed{\text{si } \rho(0) = 1}$, on a $\forall t \in \mathbb{R}, \rho(t) = 1$.
- Si $\rho(0) \neq 0$ et $\rho(0) \neq 1$, ρ ne prend jamais les valeurs 0 ou 1 et l'équation se réécrit

$$\frac{\rho'}{\rho(1-\rho^2)} = 1.$$

sixième question (2)

- On veut donc résoudre $\frac{\rho'}{\rho(1-\rho^2)} = 1$;
- c-à-d. $\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\rho} - \frac{1}{1+\rho}\right)\right)\rho' = 1$.
- qui s'intègre en

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\rho^2(t)}{|1-\rho^2(t)|}\right) = t + C.$$

- $\boxed{\text{si } \rho(0) < 1}$, on obtient $\frac{\rho^2(t)}{1-\rho^2(t)} = e^{2(t+C)}$;
- donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \rho(t) = \sqrt{\frac{1}{1+\lambda e^{-2t}}}$$

où $\lambda > 0$.

sixième question (3)

- $\boxed{\text{si } \rho(0) > 1}$, on obtient $\frac{\rho^2(t)}{\rho^2(t)-1} = e^{2(t+C)}$ pour $t > -C$;
- donc
$$\forall t \in \mathbb{R}, \rho(t) = \sqrt{\frac{1}{1-\lambda e^{-2t}}}$$
où $\lambda > 0$ et $t \in]\frac{\ln \lambda}{2}, +\infty[$.
- En conclusion, les solutions sont
  - sur $\mathbb{R}$, $\rho(t) = 1$ et $\theta(t) = \theta(0) + t$;
  - sur $\mathbb{R}$, $\rho(t) = \sqrt{\frac{1}{1+\lambda e^{-2t}}}$ où $\lambda > 0$;
  - sur $]\frac{\ln \lambda}{2}, +\infty[$, $\rho(t) = \sqrt{\frac{1}{1-\lambda e^{-2t}}}$ où $\lambda > 0$.

On a vu que

- sur $\mathbb{R}$, $\rho(t) = 1$ et $\theta(t) = \theta(0) + t$;
- sur $\mathbb{R}$, $\rho(t) = \sqrt{\frac{1}{1+\lambda e^{-2t}}}$ où $\lambda > 0$;
- sur $]\frac{\ln\lambda}{2}, +\infty[$, $\rho(t) = \sqrt{\frac{1}{1-\lambda e^{-2t}}}$ où $\lambda > 0$.

La dernière courbe a une asymptote d'équation $\theta = \frac{\ln\lambda}{2}$.