$\boxed{\text{TD 5}}$ Ex 5

1) On peut écrire le système sous la forme

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = F(x) \end{cases} \quad (4)$$

2) $(x, v) = (x_0, V_0)$ est une solution constante ssi

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ F(x_0) = 0 \end{cases}$$

On les points critiques de U sont les $x \in \mathbb{R}$ tq $U'(x) = 0$, c'est-à-dire $F(x) = 0$

D'où $(x\ v)$ est une solution constante ssi $v_0 = 0$ et x_0 est un point critique de U.

3) Soit (x, v) une solution de (4).

Alors
$$\frac{d}{dt}\Big(E(x(t), v(t))\Big) = \frac{d}{dt}\Big(K(v(t)) + U(x(t))\Big)$$
$$= v'(t)\,K'(v(t)) + x'(t)\,U'(x(t))$$
$$= F(x(t))\,v(t) - v(t)\,F(x(t))$$
$$= 0$$

$K'(v) = v$
$v' = F(x)$
$x' = v$

D'où E est constante le long des solutions de (4).

4) Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $L(x,v) = E(x,v) - E(x_0, 0)$.
Alors L est une fonction de Liapounov pour $(x_0, 0)$.
En effet, L est définie sur un voisinage de $(x_0, 0)$ (sur tout $\mathbb{R}^2$), elle est continue,

- $\forall (x,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, 0)\}$, $L(x,v) = \frac{1}{2}|v|^2 + \underbrace{U(x) - U(x_0)}_{> 0 \text{ car } x_0 \text{ minimum strict de } U} > 0$

  et $L(x_0, 0) = 0$
- L est constante le long des solutions de l'équation, donc elle est en particulier décroissante le long de ces solutions.

D'après le cours, $(x_0, 0)$ est donc un point d'équilibre <u>stable</u> du système.

Remarquons que L n'est pas strictement décroissante le long des solutions, elle n'est donc <u>pas</u> une fonction de Liapounov <u>stricte</u> pour $(x_0, 0)$, et on ne peut donc pas appliquer le résultat vu en cours pour dire que $(x_0, 0)$ est loc. asymptotiquement stable.
⚠ Cela ne permet <u>pas</u> de conclure que ce point n'est pas loc. asympt. stable.
(le thm du cours donne seulement une $\Rightarrow$.

Montrons à présent qu'il n'est pas asymptotiquement stable.
Par l'absurde, supposons que c'est le cas, et qu'il existe un voisinage Ω de $(0, x_0)$ tq toute solution (x, v) tel que $(x(0), v(0)) \in \Omega$ converge vers $(x_0, 0)$ lorsque $t \to +\infty$.

Considérons $(x_0, v_1) \in \Omega$ avec $v_1 \neq 0$, et (x, v) une solution de (4) tq $(x(0), v(0)) = (x_0, v_1)$. Alors $(x(t), v(t)) = (x(t), x'(t)) \longrightarrow (x_0, 0)$.

Mais $t \mapsto \underline{E}(x(t), v(t))$ est constante, donc

$$\underbrace{\frac{1}{2} x'(t)^2 - U(x(t))}_{\downarrow\, t \to +\infty \atop 0 - U(x_0).} = \frac{1}{2} v_1^2 - U(x_0)$$

D'où $\frac{1}{2} v_1^2 = 0$, ce qui est absurde car $v_1 \neq 0$.

5) On a $(x, v)' = G(x, v)$ où $G(x, v) = (v, F(x))$ donc la matrice jacobienne de G en $(x_0, 0)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F'(x_0) & 0 \end{pmatrix}$$, et le système linéarisé est $\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme $X^2 - F'(x_0)$
$= X^2 + U''(x_0)$.

Comme x_0 est un minimum de U, $U''(x_0) \geq 0$.

Ainsi les valeurs propres de A ont une partie réelle nulle, mais ceci ne permet pas de conclure que $(x_0, 0)$ est stable.

6) La loi de conservation de l'énergie dit que

$$\frac{1}{2} x'(t)^2 + U(x(t)) = E_0.$$

Si $x(t)$ est strictement monotone, $x'(t)$ est soit toujours strictement positive (si $x'(0) > 0$), soit toujours strictement négative (si $x'(0) < 0$).

6) (Suite)

Ainsi $x'(t) = (\text{signe}(x'(0)))\sqrt{2[E_0 - U(x(t))]}$.

D'où $T = \int_0^T 1\,ds = \text{signe}(x'(0)) \int_0^T \frac{x'(s)}{\sqrt{2[E_0 - U(x(s))]}}\,ds$

changement de variable

$y = x(s)$

$$= \text{signe}(x'(0)) \int_{x(0)}^{x(T)} \frac{1}{\sqrt{2[E_0 - U(y)]}}\,dy$$

$$= \text{signe}(x'(0)) \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2[E_0 - U(y)]}}\,dy$$