Exercice 2 feuille 5 Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et (1) $x' = \mu x - x^3$

C'est une équation différentielle scalaire autonome du premier ordre.
Comme $x \in \mathbb{R} \longmapsto \mu x - x^3$ est de classe C^1, cette fonction est localement lipschitzienne et on peut lui appliquer le thm de Cauchy-Lipschitz.
A chaque condition initiale $x(t_0) = x_0$ il correspond donc une unique solution maximale.

1°/ Si $\mu = 0$, l'équation s'écrit $x' = -x^3$. Le seul équilibre, pour lequel $x^3 = 0$, correspond à $x = 0$. Soit x une solution (maximale) de condition initiale $x(0) = x_0$.

→ si $x_0 = 0$, la solution est $t \mapsto 0$ qu'on vient de déterminer

→ si $x_0 \neq 0$, la solution ne peut s'annuler. En effet, si on avait $x(t_0) = 0$, alors x et la solution nulle auraient même condition initiale en t_0, et seraient donc égales par C-Lip, ce qui n'est pas le cas si $x(0) \neq 0$. Comme x ne s'annule pas, on peut donc séparer les variables et écrire $\frac{x'}{x^3} = -1$.

Ceci s'intègre en $\frac{1}{2x^2(t)} = t + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $x^2(t) = \frac{1}{2\left(t + \frac{1}{2x_0^2}\right)}$ pour $t > -\frac{1}{2x_0^2}$.

Or, comme x est continue, définie sur un intervalle et ne s'annule pas, on sait grâce au TVI qu'elle est de signe constant. Ainsi

- si $x_0 > 0$ $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t + \frac{1}{2x_0^2}}}$; • si $x_0 < 0$, $x(t) = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{t_0 + \frac{1}{2x_0^2}}}$

Comme dans les deux cas $\lim\limits_{+\infty} x = 0$, l'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

2°/ On suppose $\mu \neq 0$. Le second membre de l'équation s'écrit $x(\mu - x^2) = f_\mu(x)$.

0 est toujours un point d'équilibre et $f_\mu'(0) = \mu$. Aussi :

- si $\mu < 0$, 0 est asymptotiquement stable et stable ;
- si $\mu > 0$, 0 est instable.

Si $\mu < 0$, le polynôme $\mu - x^2$ n'a pas de racine réelle et donc il n'y a pas d'autre équilibre.

Si $\mu > 0$, $\pm\sqrt{\mu}$ sont les deux points d'équilibre du système.

On a alors $f_\mu'(x) = \mu - 3x^2$ donc $f_\mu'(\pm\sqrt{\mu}) = \mu - 3\mu = -2\mu < 0$.

Les équilibres $\pm\sqrt{\mu}$ sont donc stables et asymptotiquement stables.

3°/ On peut tracer les orbites dans les différents cas.