<u>Exercice 1, feuille 5</u> Les systèmes envisagés dans cet exercice sont des systèmes différentiels linéaires. Les 3 premiers sont homogènes.

① $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ a pour matrice associée $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il y a un seul équilibre du système, puisque A_1 est inversible, le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le seul pour lequel $X' = A_1 X = 0$. La matrice A_1 étant diagonale, on lit immédiatement ses valeurs propres ± 1. Comme l'une de ces valeurs propres est positive strictement, le système est instable.

② $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ a pour matrice associée $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme A_2 est inversible, il y a encore un seul équilibre, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de la matrice est X^2+1, ses valeurs propres sont $\pm i$. Il existe donc une matrice P de changement de base telle que $P^{-1} e^{tA_2} P = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ +\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Les solutions s'écrivent donc $X(t) = P \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} P^{-1} X(0)$. Elles parcourent donc des ellipses (ici des cercles) autour de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, qui est donc un équilibre stable mais pas asymptotiquement stable.

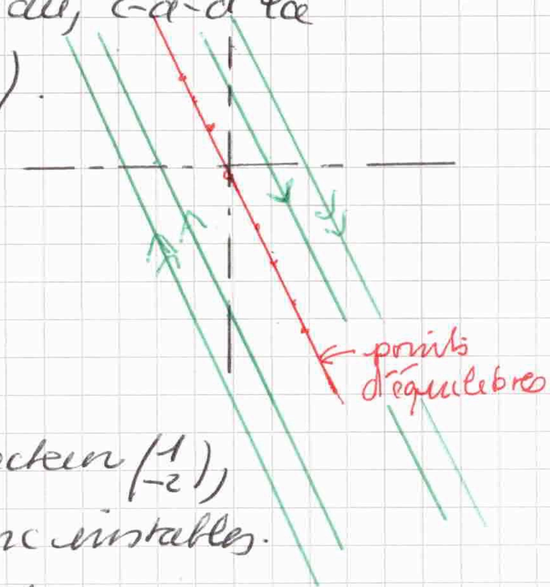
<u>note</u> on a déjà rencontré ce système et vu deux manières de le résoudre

→ en calculant $e^{tA_1} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A_1^n = \cos t\, I + \sin t\, A_2 = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

→ en diagonalisant sur $\mathbb{C}$ et prenant les parties réelles de solutions dont une condition initiale est un vecteur propre de A_2

③ $\begin{cases} x' = 2x+y \\ y' = -4x-2y \end{cases}$ a pour matrice associée $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ de déterminant nul.

Les équilibres du système sont les éléments du noyau, c-à-d la droite d'équation $2x+y=0$, i.e. de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.



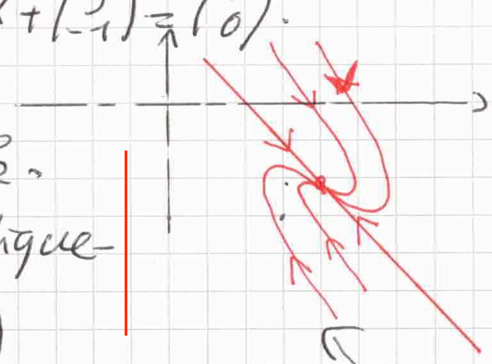
La trace de A_3 étant nulle, le polynôme caractéristique de A_3 est nul et la matrice est nilpotente : $A_3^2 = 0$.

On a donc $e^{tA_3} = I_2 + tA_3 = \begin{pmatrix} 1+2t & t \\ -4t & 1-2t \end{pmatrix}$ et

$$X(t) = e^{tA_3}X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} + (2x_1(0) + x_2(0))\,t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les solutions restent sur des droites parallèles de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, sur lequel le mouvement est uniforme. Les équilibres sont donc instables.

④ $\begin{cases} x' = y+3 \\ y' = -x-2y-1 \end{cases}$ ⚠ le système n'est pas homogène ! Il a pour matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ qui est inversible. Il y a donc un unique équilibre, $A_4^{-1}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ qui vérifie $X' = A_4X + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Le polynôme caractéristique de A_4 est $P(X) = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$.

-1 est donc racine double de P et A_4 n'est pas diagonalisable.

Comme $-1<0$, l'équilibre est stable et même asymptotiquement stable. En effet, on a $X(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + e^{tA_4}\left(X(0) - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$

et $\lim_{t\to+\infty} e^{+tA_4} = 0$. $\boxed{\text{PS}}$: on ne vous le demandait pas, mais $A_4 = -1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotente}}$

donne $e^{tA_4} = e^{-t}\left(I_2 + t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right)$ ce qui permet de tracer ci-après et à l'aide