Feuille TD 4 - Autour du théorème de Cauchy-Lipschitz

Lemme 1. *Considérons* $f(t,y) = h(y) = y'$ *où* h *est* C^1 *sur* $I \subset \mathbb{R}$ *(pour être dans les conditions d'application de C-L.) avec* $0 \in I$ *et* $h \geq 0$ *telle que* $h(t) = 0 \Rightarrow t = 0$*. Bien sûr penser à* $h(y) = y\log(1+y)$*. On suppose que* y *solution de l'équation et est définie sur* $]-\infty, +\infty[$*,* $y > 0$ *et croissante. Alors* $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$ *et* $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$*.*

Démonstration. Si $y(t) \to \ell \neq 0$ quand $t \to -\infty$ on a l'existence de $\lim_{t\to-\infty} y'(t) := l$ donnée par $l = h(\ell)$
Soit $\epsilon > 0$, il existe A tel que

$$l - \epsilon \leq y'(t) \leq l + \epsilon,$$

pour $t \leq A$.
Donc on obtient en intégrant le membre de gauche pour $t < A$:

$$(l - \epsilon)(A - t) \leq y(A) - y(t).$$

Comme $l > 0$ on peut choisir ϵ assez petit tel que $(l - \epsilon) > 0$.
Il vient

$$y(t) - y(A) \leq (l - \epsilon)(t - A).$$

L'inégalité est vraie pour $t \in]-\infty, A]$ on fait tendre $t \to -\infty$. Il s'en suit que $y \to -\infty$, ce qui est absurde car $y > 0$.
Donc $\lim_{t\to-\infty} y'(t) = h(\ell) = 0$, donc finalement, par hypothèse, $h(\ell) = 0$ donne $\ell = 0 = \lim_{t\to-\infty} y(t)$.

Si $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \ell < +\infty$, alors y est bornée. Mais on a $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = l = h(\ell) < \infty$, avec $l > 0$. Par un raisonnement analogue au précédent, au voisinage de $+\infty$ on va pouvoir démontrer que y explose. Donc nécessairement $y \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. En effet, soit $\epsilon > 0$, il existe A tel que pout $t \geq A$

$$l - \epsilon \leq y'(t),$$

et donc

$$(l - \epsilon)(t - A) \leq y(t) - y(A).$$

pour $t \geq A$. Prendre alors ϵ assez petit et faire tendre $t \to +\infty$ pour montrer que y ne peut pas être bornée. Ainsi $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.

□

Correction Ex 12 : $f : (t,y) \in J \times \Omega = \mathbb{R}\times]-1, +\infty[\mapsto y\log(1+y)$.
La fonction f est C^1 en tant que fonction de deux variables. Donc a fortiori f est une fonction localement Lipschitz en y uniformément en t.

1. L'ensemble Ω n'est rien d'autre que $]-1, +\infty[$ et $J =]-\infty, +\infty[$.
2. Trouver les solutions constantes revient à résoudre $y' = 0 = f(t,y)$. Donc si y est une solution constante alors $y\log(1+y) = 0$. Ce qui implique que $y = 0$.
3. On a deux cas. Si $a > 0$, alors la solution part de $y(0) = a$, et comme 0 est solution alors il n'existe pas de t_0 tel que $y(t_0) < 0$ par unicité des solution dans le théorème de Cauchy-Lip. Autrement dit les solutions ne peuvent pas se croiser. Si $a > 0$ alors $y_a > 0$. Par un raisonnement analogue, si $a < 0$ alors $y_a < 0$.
4. Examinons le cas $a > 0$. On a montré que $y_a > 0$. Donc $0 < y_a\log(1+y_a) = y_a'$, donc y_a est croissante (strictement).
   La solution y_a est définie sur $]T_a^-, T_a^+[\ni 0$.
5. **Traitons le cas** $a > 0$ **:** la limite $\lim_{t\to T_a^-} y_a(t)$ existe car la fonction $0 \leq y_a$ et est strictement croissante. Elle admet une limite $l_a^- := \lim_{t\to T_a^-} y_a(t)$. Supposons l_a^- non nulle. On observe que y_a' admet une limite en T_a^- donnée par
   $$l_a^- \log(1 + l_a^-).$$
   Mais cette limite doit forcément être nulle (cf début du TD) car y_a>0 sur $]T_a^-, T_a^+[$.
   En T_a^+ : si T_a^+ est finie alors on sort de tout compact, donc $y_a \to +\infty$ en T_a^+. Si T_a^+ est infinie utiliser la conclusion du Lemme 1.

6. Déterminons T_a^- : *Si* $T_a^- > \inf J$, *alors* y_a *sort de tout compact* $K \subset]-1,+\infty[$ *au voisinage de* T_a^-. Ici, on a que $0 < y_a(t) \leq a$ pour tout $t \in]T_a^-, 0]$. En fait y_a reste dans $[0,a]$ qui est un compact de Ω. Donc y_a ne pourra pas sortir des compacts de Ω, donc

$$T_a^- = \inf J = -\infty.$$

Déterminons T_a^+ : la formule de l'exercice 4 nous donne

$$t = \int_a^{y_a(t)} \frac{1}{\tau \log(1+\tau)} d\tau,$$

pour $t \in [0, T_a^+[$. On combine la formule avec le lemme de sorties des compacts : Si $T_a^+ < +\infty = \sup J$ alors $y_a \to +\infty$ lorsque $t \to T_a^+$. On observe que

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{\tau \log(1+\tau)} d\tau$$

est une intégrale divergente, donc en passant à la limite dans la formule de l'exercice 4 on obtient une contradiction

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{\tau \log(1+\tau)} d\tau = T_a^+ < +\infty.$$

Donc

$$T_a^+ = +\infty.$$