Année 2019-2020 | **L3 Math**
Université de Paris | **Equations différentielles**

Corrigé du partiel du jeudi 12 mars 2020

Les exercices sont indépendants. Les documents, calculettes et téléphones sont interdits. L'épreuve dure 3 heures.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes

(i) $y' - 2y = e^{2t} + 2t - t^2$

Réponse On commence par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée $z' - 2z = 0$. Ses solutions sont de la forme $z(t) = ae^{2t}$, où $a \in \mathbb{R}$.

Il suffit alors de trouver une solution particulière u de l'équation $y'-2y = e^{2t}+2t-t^2$ et l'ensemble des solutions sera ainsi $\{u + z \mid \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = ae^{2t}, a \in \mathbb{R}\}$. Plusieurs méthodes sont possibles : la méthode de la variation de la constante consiste à poser $y(t) = a(t)e^{2t}$, à déterminer, l'équation différentielle satisfaite par a, qui sera $a'(t) = 1 + (2t - t^2)e^{-2t}$ et à résoudre cette équation, ce qui revient à chercher une primitive du second membre de cette relation. Cette méthode marche mais est un peu compliquée.

Il est plus simple ici de chercher la solution particulière sous la forme $u = v + w$, où v et w sont solutions de, respectivement,

$$v' - 2v = e^{2t} \quad \text{et} \quad w' - 2w = 2t - t^2$$

Pour trouver une solution v de la première équation, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante et poser $v(t) = b(t)e^{2t}$. On obtient alors $v'(t) - 2v(t) = b'(t)e^{2t}$ et donc $b'(t) = 1$. On peut donc choisir $b(t) = t$ et donc $v(t) = te^{2t}$.

Pour trouver une solution w de la deuxième équation, on remarque que le second membre est un polynôme du second degré et on peut chercher w sous la forme d'un polynôme du second degré (cela est suffisant car le premier membre de l'équation contient $-2w$). On pose donc $w(t) = \alpha t^2+\beta t+\gamma$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont des constantes à déterminer. On a alors $w'(t) = 2\alpha t + \beta$ et donc

$$w'(t) - 2w(t) = -2\alpha t^2 + 2(\alpha - \beta)t + \beta - 2\gamma$$

L'équation nous donne alors le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2\alpha &=& -1 \\ 2\alpha - 2\beta &=& 2 \\ \beta - 2\gamma &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& 1/2 \\ \beta &=& -1/2 \\ \gamma &=& -1/4 \end{array}\right.$$

Donc $w(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$ est une solution.

En conclusion, les solutions sont de la forme $y = z + v + w$, c'est à dire

$$y(t) = (a + t)e^{2t} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$$

(ii) $y'' + y' + y = -3\sin(3t) - 8\cos(3t)$

Réponse On procède comme dans la question précédente : on resout d'abord l'équation différentielle linéaire homogène associée $z'' + z' + z = 0$. L'équation caractéristique associée (en cherchant des solutions à valeurs complexes de la forme $z(t) = e^{\lambda t}$) est $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = -3$, les racines sont $\lambda_1 = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_2 = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions z sont donc de la forme

$$z(t) = \alpha e^{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}t} + \beta e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}t} = e^{-t/2}\left((\alpha+\beta)\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + i(\alpha-\beta)\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)$$

Il ne reste plus alors qu'à trouver une solution particulière u et à l'ajouter à n'importe quelle solution z de l'équation différentielle linéaire homogène associée pour avoir toutes les solutions. La méthode de la variation de la constante marche mais conduit à des calculs compliqués. Il est plus simple de remarquer à nouveau que le membre de gauche de l'équation à résoudre est linéaire, tandis que le second membre est une combinaison linéaire de $\cos(3t)$ et $\sin(3t)$ et de chercher u sous la forme d'une combinaison linéaire de ces deux fonctions. On cherche donc u sous la forme $u(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t)$. On a alors

$$\left|\begin{array}{rcl} u & = & a\cos(3t) + b\sin(3t) \\ u' & = & -3a\sin(3t) + 3b\cos(3t) \\ u'' & = & -9a\cos(3t) - 9b\sin(3t) \end{array}\right.$$

et donc

$$u + u' + u'' = (-8a + 3b)\cos(3t) + (-3a - 8b)\sin(3t)$$

On doit donc choisir $a = 1$ et $b = 0$ pour avoir $u + u' + u'' = -8\cos(3t) - 3\sin(3t)$. Ainsi les solutions de l'équation sont donc

$$y(t) = \cos(3t) + e^{-t/2}\left(a\cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + b\sin\left(\sqrt{3}t/2\right)\right)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Déterminer, en fonction de $a \in \mathbb{R}$, si les équations suivantes admettent une solution locale, si elle est unique et déterminer l'intervalle maximal I sur lequel les solutions sont définies.

(i) $y' = y^3$, $y(0) = a$,

Réponse Le second membre de l'équation est $f(y)$, où $f(x) = x^3$.

— f est continue, donc il y a existence locale par le théorème de Cauchy-Peano ;

— f est $\mathcal{C}^1$, donc localement lipschitzienne, donc il y unicité de la solution au problème de Cauchy par le théorème de Cauchy-Lipschitz ;

— en revanche f a une croissance sur-linéaire, il y a donc un risque d'explosion de la solution en un temps fini. Vérifions que c'est effectivement le cas, si $a \neq 0$ (si

$a = 0$, la solution y est nulle partout, donc définie partout). On a alors $y \neq 0$ sur un voisinage de 0. L'équation équivaut alors à :

$$1 = \frac{y'}{y^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{2y(t)^2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2y(t)^2} = \frac{1}{2y(0)^2} - t - C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. On en déduit que $y(t) = \frac{\epsilon}{\sqrt{1/a^2 - 2t - 2C}}$, où ϵ est le signe de y. Pour que la condition $y(0) = a$ soit satisfaite, il faut que $C = 0$. On obtient donc

$$y(t) = \frac{a}{\sqrt{1 - 2a^2 t}}$$

Cette solution est singulière en $t = 1/2a^2$. On en déduit qu'il n'est pas possible de prolonger la solution si $t > 1/2a^2$. Donc $I =]-\infty, 1/2a^2[$.

(ii) $y' = \frac{\sqrt{y^6+1}}{y^2+4}$,

Réponse Le second membre de l'équation est $f(y)$, où $f(x) = \frac{\sqrt{x^6+1}}{x^2+4}$.

— f est continue, donc il y a existence locale par le théorème de Cauchy-Peano ;

— f est $\mathcal{C}^1$, donc localement lipschitzienne, donc il y unicité de la solution au problème de Cauchy par le théorème de Cauchy-Lipschitz ;

— f est à *croissance sous-linéaire*. En effet, on a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\sqrt{1 + 1/x^6}}{1 + 4/x^2}$$

qui est bornée. Donc, d'après un théorème du cours, la solution maximale est définie sur tout $\mathbb{R}$.

(iii) $y' = \sqrt{|y^2 - 1|}$, $y(0) = a$ (suivant les cas, on pourra poser $y = \epsilon \operatorname{ch} t$ ou $y = \sin\theta$, où ϵ est une constante à préciser)

Réponse Le second membre de l'équation est $f(y)$, où $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$.

— f est continue, donc il y a existence locale par le théorème de Cauchy-Peano ;

— f n'est pas localement lipschitzienne, l'unicité de la solution au problème de Cauchy *n'est donc pas garantie*. En effet $\frac{f(x)-1}{|x-1|} = \sqrt{\frac{|x+1|}{|x-1|}}$ n'est pas bornée au voisinage de 1 et $\frac{f(x)-1}{|x+1|} = \sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}}$ n'est pas bornée au voisinage de -1 ;

— il est possible de résoudre l'équation localement.

Si $a > 1$, on peut écrire sur un voisinage de $t = 0$ $y(t) = \operatorname{ch}(u(t))$, où u est une fonction inconnue à valeur dans $[0, +\infty[$. On a alors, d'une part, $y'(t) = u' \operatorname{ch} u$ et, d'autre part, $f(u) = \operatorname{sh} u$. Donc $u' = 1$ et on en déduit que $y(t) = \operatorname{ch}(\operatorname{Argch}(a) + t)$.

De même, si $a < -1$, on peut écrire sur un voisinage de $t = 0$ $y(t) = -\operatorname{ch}(u(t))$, où u est une fonction inconnue à valeur dans $[0, +\infty[$. On a alors, d'une part, $y'(t) = -u' \operatorname{ch} u$ et, d'autre part, $f(u) = -\operatorname{sh} u$. Donc $u' = -1$ et on en déduit que $y(t) = -\operatorname{ch}(\operatorname{Argch}(a) - t)$.

Enfin, si $-1 < a < 1$, on pose $y(t) = \sin(u(t))$, où u prend ses valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$ et, par un raisonnement similaire, on obtient $y(t) = \sin(\text{Arcsin}(a)+t)$. Toutefois il faut noter que, si $a = 1$, $y(t) = 1$ est une solution constante et, si $a = -1$, $y(t) = -1$ est aussi solution.
Cependant il n'y a pas unicité[1] de la solution. Ainsi par exemple, pour tout $t_0 > 0$, l'application y définie par :

$$\begin{cases} \forall t \in]-\infty, t_0[, & y(t) = 1 \\ \forall t \in [t_0, +\infty[, & y(t) = \text{ch}(t-t_0) \end{cases}$$

est solution de l'équation différentielle avec $a = 1$.

Exercice 3. Déterminer les solutions du système suivant en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$. Préciser si elles stables, asymptotiquement stables et décrire, si possible par un dessin, l'allure des solutions.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Réponse Notons $A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda - A) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - \alpha$$

Son discriminant réduit est $\Delta' = \alpha$. Plusieurs cas se présentent selon le signe de α.

— si $\alpha > 0$, P_A admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = -1 - \sqrt{\alpha}$ et $\lambda_2 = -1 + \sqrt{\alpha}$. Des vecteurs propres de A pour ces valeurs propres sont respectivement

$$u_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont donc de la forme

$$y(t) = ae^{-(1+\sqrt{\alpha})t} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \\ -1 \end{pmatrix} + be^{-(1-\sqrt{\alpha})t} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Si $0 < \alpha < 1$, $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, donc 0 est un équilibre asymptotiquement stable, d'après les résultats du cours. Si $\alpha = 1$, les

1. Plus généralement, on remarque que, comme $f(x) \geq 0$, toute solution est nécessaire croissante. De plus, f est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, donc la solution est unique sur un voisinage de n'importe quelle valeur $t \in \mathbb{R}$ telle que $y(t) \notin \{-1, 1\}$. On peut donc construire toutes les solutions maximales comme suit.

On choisit $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ tels que $t_1 \leq t_2 - \frac{\pi}{2}$ et $t_2 + \frac{\pi}{2} \leq t_3$ et on définit y par :

$$\begin{cases} \forall t \in]-\infty, t_1], & y(t) = -\text{ch}(t_1 - t) \\ \forall t \in]t_1, t_2 - \frac{\pi}{2}], & y(t) = -1 \\ \forall t \in]t_2 - \frac{\pi}{2}, t_2 + \frac{\pi}{2}], & y(t) = \sin(t - t_2) \\ \forall t \in]t_2 + \frac{\pi}{2}, t_3], & y(t) = 1 \\ \forall t \in]t_3, +\infty[, & y(t) = \text{ch}(t - t_3) \end{cases}$$

Alors y est solution de $y' = \sqrt{|y^2 - 1|}$

solutions sont de la forme $y(t) = ae^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, elles sont donc stables mais non asymptotiquement stables (par exemple, si $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $y(t)$ est constant). Si $\alpha > 1$, alors $\lambda_2 > 0$ et donc 0 est un équilibre instable.

— si $\alpha = 0$, alors, comme $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et que ces deux matrices commutent, on a

$$e^{tA} = e^{t\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} e^{t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$y(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) + ty_1(0) \end{pmatrix}$$

Comme, pour la racine double, $\lambda_1 = -1 < 0$, 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

— si $\alpha < 0$, les racines sont complexes et conjuguées : $\lambda_1 = -1 + i\sqrt{-\alpha}$ et $\lambda_2 = -1 - i\sqrt{-\alpha}$ Des vecteurs propres de A pour ces valeurs propres sont respectivement

$$u_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{-\alpha} \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{-\alpha} \\ i \end{pmatrix}$$

Les solutions réelles sont donc de la forme

$$y(t) = ae^{(-1+i\sqrt{-\alpha})t}\begin{pmatrix} \sqrt{-\alpha} \\ -i \end{pmatrix} + \bar{a}e^{(-1-i\sqrt{-\alpha})t}\begin{pmatrix} \sqrt{-\alpha} \\ i \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{C}$. En notant $a = \frac{C}{2}e^{i\theta}$, on peut réécrire $y(t)$ sous la forme

$$y(t) = Ce^{-t}\begin{pmatrix} \sqrt{-\alpha}\cos(\sqrt{-\alpha}t + \theta) \\ \sin(\sqrt{-\alpha}t + \theta) \end{pmatrix}$$

Comme $\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = -1 < 0$, 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Pour les figures, voir la dernière page.

Exercice 4. Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, solution de $y'(x) \leq 2y(x) + 1$. Montrer que $\forall x \geq 0$,

$$y(x) \leq y(0)e^{2x} + \frac{e^{2x} - 1}{2}$$

Réponse Une solution de l'équation différentielle linéaire $z' - 2z = 0$, associée à cette inégalité différentielle, est $z(t) = e^{2x}$. Nous multiplions l'inégalité par l'inverse de cette solution $z(x)$ et obtenons

$$e^{-2x}\left(y'(x) - 2y(x) - 1\right) \leq 0,$$

ce qui nous donne

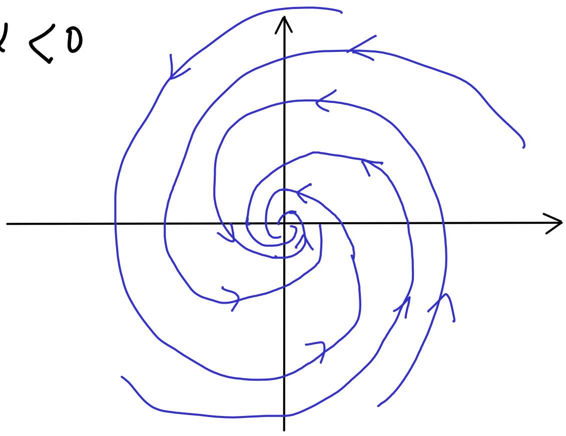
$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}y(x)+\frac{e^{-2x}}{2}\right)=e^{-2x}y'(x)-2y(x)-e^{-2x}\leq 0$$

Donc la fonction $u(x)=e^{-2x}y(x)+\frac{e^{-2x}}{2}$ est décroissante et, par conséquent, si $x\geq 0$,

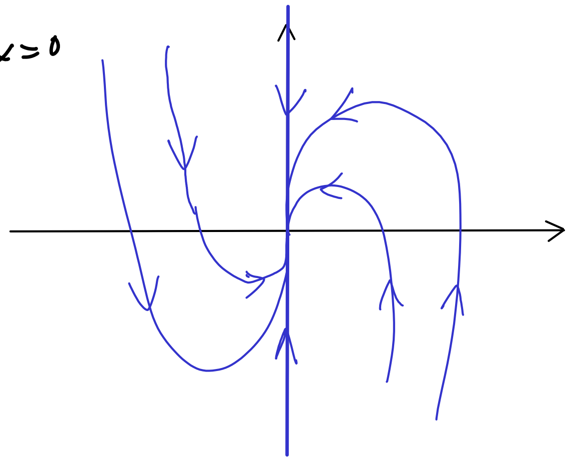
$$e^{-2x}y(x)+\frac{e^{-2x}}{2}\leq y(0)+\frac{1}{2}$$

Cela nous donne donc l'inégalité demandée en multipliant par e^{2x}.

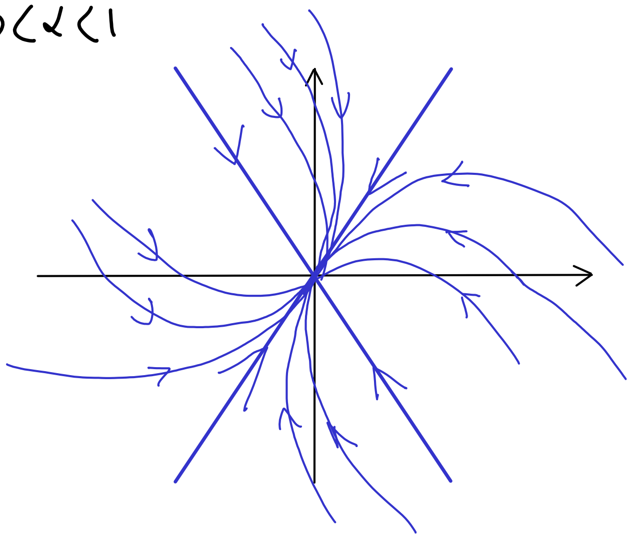
$\alpha < 0$



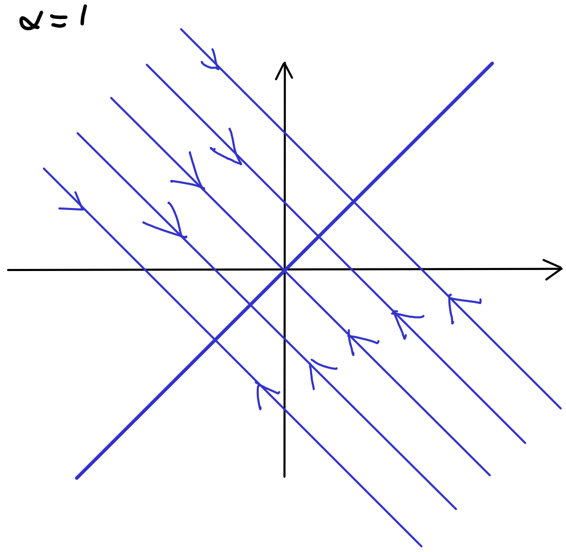
$\alpha = 0$



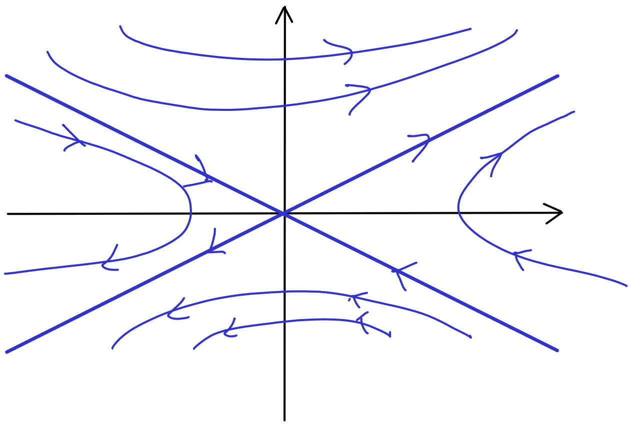
$0 < \alpha < 1$



$\alpha = 1$



$\alpha > 1$



Exercice 3 : allure des solutions du système