Feuille TD 7 - Méthodes numériques

Préambule (Méthode d'Euler implicite) Etant donnée une équation différentielle $x' = f(t, x)$ où f est de classe C^1, la méthode d'Euler implicite consiste à poser

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}). \end{cases}$$

Ainsi, la deuxième équation fournit implicitement y_{i+1}.

Exercice 1 (Approximations d'intégrales)**.** Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérons l'équation

$$x' = g(t). \tag{1}$$

1. Écrire la solution $u(t)$ de (1) vérifiant $u(t_0) = x_0$ à l'aide d'une intégrale.
   (a) La méthode explicite d'Euler appliquée sur un intervalle $[a, b]$ est-elle consistante, stable convergente ?
   (b) Appliquer la méthode d'Euler explicite de pas $h = \frac{t-t_0}{n}$ entre t_0 et t, qui définit $u_h : [t_0, t] \to \mathbb{R}$.
   (c) Interpréter $u_h(t)$ à l'aide de votre cours d'intégration de Riemann. Quel résultat classique d'intégraption retrouve-t-on en appliquant la méthode d'Euler ?
2. Appliquer la méthode du point milieu de pas $h = \frac{t-t_0}{n}$ entre t_0 et t, qui définit $v_h : [t_0, t] \to \mathbb{R}$.
3. Interpréter $v_h(t)$ comme l'intégrale d'une fonction en escalier que l'on précisera.

Exercice 2 (Les méthodes d'Euler dans le cas linéaire)**.** On s'intéresse dans cet exercice aux méthodes d'Euler explicite et implicite pour la résolution d'un problème de Cauchy linéaire dans $\mathbb{R}^d$ de la forme

$$y' = Ay; \quad y(0) = y_0. \tag{2}$$

On considère un pas $h > 0$ et on note $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$. On note $Y_h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^d$ la solution approchée affine par morceaux obtenue et $y_n^h = Y_h(nh)$ les points calculés par la méthode d'Euler.

1. **Le cas scalaire.** On suppose $d = 1$.
   (a) On suppose $d = 1$. Calculer explicitement la famille de fonctions $Y_h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ données par la méthode d'Euler explicite et vérifier (à la main) sur cet exemple la convergence uniforme de cette méthode sur tout segment $[0, T]$.
   (b) Même question pour le méthode d'Euler implicite.
   (c) On suppose que $y_0 \geq 0$. Discuter, suivant les valeurs des paramètre $A \in \mathbb{R}$ et h, les signes des (y_n^h) pour les deux méthodes utilisées. Quelle conclusion en tirez-vous ?
2. **Le cas défini négatif.** On revient au cas général $d \geq 1$ et on suppose que A est symétrique définie négative.
   (a) Montrer (avec un minimum de calculs) que la solution exacte de (2) est bornée sur $[0, +\infty[$.
   (b) Montrer que la méthode d'Euler implicite pour ce problème est parfaitement définie pour toute valeur du pas du temps.
   (c) Montrer que les solutions approchées (Y_h) obtenue par cette méthode implicite sont bornées.
   (d) Montrer que la famille (Y_h) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la solution exacte.
3. **(Le cas antisymétrique)** On suppose que A est antisymétrique réelle.
   (a) Montrer que la norme euclidienne de la solution exacte de (2) est constante.
   (b) Etudier le comportement des suites $(\|y_n^h\|)$ où les y_n^h sont obtenus par les méthodes d'Euler explicite et implicite. Quels sont vos commentaires ?
   (c) Montrer que le schéma suivant permet de bien définir (y_n) (de manière implicite).

$$\forall n \geq 1, \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = A\frac{y_{n+1} + y_n}{2}. \tag{3}$$

   Quel est le comportement, dans ce cas, de la suite $(\|y_n\|)$?
   (d) Définir et estimer l'erreur de consistance pour le schéma (3). Quel est son ordre ?

Exercice 3 (Problèmes hamiltoniens : l'oscillateur harmonique)**.** Soit $(x_0, p_0) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant.

$$x(0) = x_0, x'(0) = p_0, \quad \text{et} \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+, x''(t) + x(t) = 0). \tag{4}$$

1. On introduit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, p) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + p^2)$.
   (a) Montrer que la réduction d'ordre appliquée à (4) conduit au problème de Cauchy
   $$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \partial_p H((x(t), p(t)) \\ -\partial_x H((x(t), p(t)) \end{pmatrix}\right). \tag{5}$$
   (b) Montrer que si (x, p) est une solution de (5), alors
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+, H(x(t), p(t)) = H(p_0, x_0).$$
2. Soit $h > 0$ un pas de temps.
   (a) Ecrire explicitement le schéma d'Euler explicite à pas constant h pour (5). On notera $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (nh)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des temps d'approximation, et $(x_n, p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs approchées correspondantes.
   (b) Donner explicitement $(H(x_n, p_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Qu'arrive-t-il à $\|(x_n, p_n)\|$ quand $n \to +\infty$?
   (d) Répondre à (a), (b), (c) quand on utilise le schéma d'Euler implicite.
3. On définit $H_{num} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $(x, p, h) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + p^2 + hxp)$.
   Soit $h > 0$ un pas de temps.
   (a) Montrer que pour tout $(x, p, h) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, on a
   $$(1 - \frac{1}{2}h)H(x, p) \leq H_{num}(x, p, h) \leq (1 + \frac{1}{2}h)H(x, p).$$
   (b) Justifiez que le schéma implicite
   $$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ p_n \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} p_n \\ -x_{n+1} \end{pmatrix}\right) \tag{6}$$
   est bien défini. Ce schéma est appelé le *schéma d'Euler symplectique.*
   (c) Montrer que la suite ainsi construite vérifie
   $$\forall n \in \mathbb{N}, H_{num}(x_n, p_n, h) = H_{num}(x_0, p_0, h).$$
   (d) Montrer que le schéma d'Euler symplectique à pas constant est convergent et au moins d'ordre 1.

Exercice 4 (Décalage des approximations)**.** On considère la solution de $x' = x^2 - t$ vérifiant $u(0) = 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution maximale $u : I \to \mathbb{R}$ vérifiant ce problème de Cauchy. On admettra que u est définie sur $[-1, 1]$.
2. Le but de cette question est de montrer que u est convexe sur $I_+ = [0, +\infty[\cap I$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in]0, \varepsilon[, [u(t)]^2 - t > \frac{1}{2}$.
   (b) Montrer que si $T > 0$ est tel que $\forall t \in]0, T[, [u(t)]^2 - t > \frac{1}{2}$, alors u est strictement croissante et strictement convexe sur $[0, T]$.
   (c) Suposons que pour un un certain $T \in I_+$, on ait $[u(T)]^2 - T = \frac{1}{2}$. On choisit un tel T minimal. Montrer qu'alors on a $2u'(T)u(T) - 1 \leq 0$, en déduire une contradiction puis que $\forall t \in I_+, [u(t)]^2 - t > \frac{1}{2}$ et donc que $u_{|I_+}$ est strictement convexe.
3. On utilise un pas $h = \frac{1}{2}$.
   (a) Calculer à la main les approximations obtenues par la méthode d'Euler sur le segment $[-1, 1]$, c-à-d les approximations de $u(-1)$, $u(-\frac{1}{2})$, $u(\frac{1}{2})$, $u(1)$.
   (b) Dites si les deux dernières valeurs sont des valeurs par excès ou par défaut.
   (c) Trouver à l'aide d'une simple calculette les approximations obtenues par la méthode du point milieu.
4. (a) la méthode d'Euler utilisée pour "remonter" le temps (avec un pas négatif) ne donne pas exactement la même suite de valeurs que celle où l'on utilise un pas positif, lue à l'envers. Expliquer pourquoi si, partant de (t_i, x_i) avec un pas h, on obtient (t_{i+1}, x_{i+1}), en partant de (t_{i+1}, x_{i+1}) avec le pas $-h$, on ne retombe pas en général sur (t_i, x_i).
   (b) Vérifier sur l'équation $x' = x^2 - t$ avec $x_i = 1$, $h = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 (Comparaison de la méthode de Picard et la méthode d'Euler sur l'exemple (E) $x' = x$)**.**

1. Soit a un réel positif, et E l'espace vectoriel des applications continues de $[-a, a]$ dans $\mathbb{R}$. On définit Φ de E dans E par
$$\Phi(x)(t) = 1 + \int_0^t x(u)du.$$
Montrer que Φ est affine.
2. Montrer que φ est solution de (E) avec condition initiale $\varphi(0) = 1$ si et seulement si φ est un point fixe de Φ.
3. Montrer que Φ est contractante dès que $a < 1$. En déduire que la méthode des approximations successives fournit une solution de (E) sur $[-a, a]$.
4. Montrer que
$$\forall x_1, x_2 \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |\Phi^n(x_2)(t) - \Phi^n(x_1)(t)| \leq \frac{t^n}{n!}\|x_2 - x_1\|_\infty.$$
En déduire que la méthode des approximations successives fournit une solution de (E) quel que soit a.
5. Calculer les deux approximations sur $[0, 1]$ de la solution de (E) de condition initiale $x(0) = 1$ décrites ci-dessous et comparer leurs vitesses de convergence.
— Celle donnée par l'application de la question 3.
— Celle donnée par la méthode d'Euler explicite.