Feuille TD 6 - Fin flot et début méthode d'Euler

Les exercices avec **(*)** sont à traiter en priorité.

Exercice 1 (Méthode des caractéristiques)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs C^1 complet de flot ϕ_t.

0. Montrer que $D\phi_t(x) \cdot f(x) = f(\phi_t(x))$.
   Indication : Penser à la relation $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$.

Considérons une application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

1. Montrer que la fonction $u(t,x) = g(\phi_t(x))$ est solution de l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \nabla_x u(t,x) \cdot f(x). \tag{1}$$
2. Étudions maintenant l'unicité des solutions de (1). On considère donc une solution $u(t,x)$ de (1) définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
   (a) Soit F le champ de vecteurs sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ défini par $F(t,x) = (-1, f(x))$. Montrer que, si la fonction
$$\left\{ \begin{array}{llll} y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & y(t) = (\tau(t), z(t)) \end{array} \right.$$
   est solution de l'équation différentielle $y'(s) = F(y(s))$, alors $u \circ y$ est une fonction constante.
   (b) Montrer que toute solution maximale de $y' = F(y)$ coupe l'hyperplan $\tau = 0$.
   (c) En déduire que $u(t,x) = u(0, \phi_t(x))$ et conclure sur l'unicité des solutions de (1).
3. Dans le cas $n = 1$, résoudre l'équation aux dérivées partielles du transport
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + a\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0$$
   en fonction de la condition aux limites $u(0,x) = g(x)$.

Exercice 2. On considère le champ de vecteurs scalaire $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $X(x) = x^2$.

1. Sur quel domaine est défini le flot $\varphi(t,x)$ du champ de vecteurs X ? Donner son expression.
2. Représenter les orbites sur la droite réelle.

Exercice 3. On considère le champ de vecteurs
$$\begin{array}{llll} f : & \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & \left(-y - \dfrac{xz}{x^2+y^2}, x - \dfrac{yz}{x^2+y^2}, -1\right), \end{array}$$
et l'ensemble
$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1\right\}.$$

1. Représenter l'ensemble V et vérifier que le champ de vecteurs f est bien défini sur celui-ci.
2. Montrer que le flot $\varphi(t,x)$ de f laisse V stable, c'est-à-dire que pour tout $(t,x) \in \Delta_f$ (où Δ_f est l'ensemble de vie du flot) tel que $x \in V$, $\varphi(t,x) \in V$.
3. Montrer que $\mathbb{R} \times V \subseteq \Delta_f$.
   Indication : on pourra montrer que la troisième coordonnée de $\varphi(t,x)$ n'explose pas en temps fini si $x \in V$.
4. Représenter grossièrement (sans preuve) le flot $\phi(t,x)$ pour $x \in V$.
   Indication : remarquer que le champ de vecteurs f peut se séparer en
$$f(x,y,z) = (-y, x, 0) + \left(-\frac{xz}{x^2+y^2}, -\frac{yz}{x^2+y^2}, -1\right).$$

Exercice 4. Soit t une variable réelle. On considère le problème de Cauchy
$$y' = ty, \quad y(0) = 1.$$

1. Démontrer que pour tout $T > 0$, ce problème admet une solution et une seule sur $[0,T]$. Calculer cette solution

2. Montrer que l'application de la formule d'Euler de pas constant sur $[0, T]$ au problème de Cauchy précédent donne comme solution approchée
$$\bar{y}_N(T) = \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{nT^2}{N^2}\right).$$
3. En utilisant la convexité/concavité de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$, pour $\alpha > 0$, montrer l'encadrement
$$\left(1 + \frac{T^2}{N}\right)^{\frac{n}{N}} \leq 1 + \frac{nT^2}{N^2} \leq \left(1 + \frac{T^2}{N^2}\right)^n.$$
4. Calculer la limite du 2 et en déduire l'égalité
$$y(T) = \lim_{N \to +\infty} \bar{y}_N(T).$$

Exercice 5. Soit le système différentiel défini par
$$\begin{cases} x' = 2(x - ty) \\ y' = 2y \end{cases} \tag{2}$$

1. Déterminer la solution de condition initiale (x_0, y_0) au temps $t = 0$.
2. On utilise la méthode d'Euler avec pas constant h, démarrant au temps $t_0 = 0$. Soit (x_n, y_n) le point atteint au temps $t_n = nh$ ($n \in \mathbb{N}$).
   (a) Ecrire la relation qui lie (x_{n+1}, y_{n+1}) à (x_n, y_n).
   (b) Calculer explicitement (x_n, y_n) en fonction de n, h, x_0, y_0.
   Indication : il pourra être habile de poser $r_n = (1 + 2h)^{-n} x_n$.
   (c) Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée qui interpole linéairement les points (x_n, y_n) converge sur $\mathbb{R}_+$ vers la solution exacte de (2).