Feuille TD 5 - Stabilité

Exercice 1. **(*)** Determiner les équilibres pour les systèmes

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -4x - 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = -x - 2y - 1 \end{cases}$$

et déterminer leur nature (stables, asymptotiquement stables ou instables).

Exercice 2. **(*)** Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle scalaire

$$x' = \mu x - x^3 \tag{1}$$

1. Pour $\mu = 0$ trouver explicitement toutes les solution de (1) avec $x(0) = x_0$. Montrer que 0 est l'unique équilibre de (1) et qu'il est asymptotiquement stable.
2. Pour $\mu \neq 0$ trouver tous les équilibres de l'équation (1) et déterminer s'ils sont stables, asymptotiquement stables ou instables.
3. Tracer les orbites dans les différents cas.

Exercice 3. **(*)** On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = \sin(x + y) \\ y' = e^x - 1 \end{cases} \tag{2}$$

1. Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale prenant la valeur (x_0, y_0) en $t = 0$. On notera I l'intervalle maximal de définition de cette solution.
2. Montrer que pour tout $t \in I$ on a $|x(t) - x_0| \leq |t|$. En deduire que $I = \mathbb{R}$.
3. Déterminer tous les points d'équilibre de (2) et leur nature (stables, asymptotiquement stables ou instables).

Exercice 4. **(*)** Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = -kx + y - x^3 \\ y' = -x \end{cases} \tag{3}$$

1. Montrer que $(0, 0)$ est l'unique équilibre du système.
2. Écrire le système linéarisé autour de $(0, 0)$.
3. En deduire, pour $k \neq 0$, si l'origine est un équilibre stable, asymptotiquement stable ou instable.
4. L'origine est-elle stable si $k = 0$? Motiver votre réponse.

Exercice 5 (*Équation de Newton*)**.** **(*)** On considère l'équation différentielle scalaire d'ordre 2

$$x'' = F(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

où $F \in C^1(\mathbb{R})$. On définit les fonctions *énergie cinétique* et *énergie potentielle*

$$K(v) = \frac{1}{2}v^2, \qquad U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(s)ds \tag{5}$$

1. Écrire (4) comme un système dans les inconnues (x, v), où $v := x'$.
2. Montrer que les solutions constantes de (4) correspondent aux équilibres du système, i.e. aux points $(x_0, 0)$ tels que x_0 est un point critique pour $U(x)$.
3. Verifier que l'*énergie totale* $E(x, v) = K(v) + U(x)$ est constante les long des solutions de (4).
4. Soit x_0 un point de minimum strict pour $U(x)$. Montrer que $(x_0, 0)$ est stable mais pas asymptotiquement stable.

5. Écrire le système linéarisé en $(x_0, 0)$. Le système linéarisé nous permet-il de deduire que tout minimum strict est stable ?
6. Montrer, à partir de la conservation de l'energie que

$$x'(t) = \pm\sqrt{2[E_0 - U(x(t))]}$$

où E_0 est l'énergie le long la solution $x(t)$. En deduire que, si $x(t)$ est strictement monotone sur $[0, T]$, le temps pour aller de $x(0) = a$ et $x(T) = b$ est

$$T = \int_a^b \frac{dy}{\sqrt{2[E_0 - U(y)]}}.$$

Exercice 6. Soit $\gamma > 0$. On modifie l'équation de Newton avec un terme dissipatif

$$x'' = F(x) - \gamma x' \tag{6}$$

1. Écrire (4) comme un système dans les inconnues (x, y), où $y := x'$.
2. Montrer que les équilibres de (6) sont les mêmes de (4).

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point critique pour $U(x)$, où U est définie comme en (5).

1. Montrer que E est une fonction de Lyapunov pour le système.
2. En deduire la stabilité de $(x_0, 0)$. Peut-on deduire que $(x_0, 0)$ est asymptotiquement stable ?
3. Écrire le système linéarisé en $(x_0, 0)$.
4. En deduire une condition suffisante pour que $(x_0, 0)$ soit asymptotiquement stable.

Exercice 7. Un *champ de gradient* est un champ de vecteurs de la forme

$$f(x) = -\nabla V(x)$$

où $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2. Le but de cet exercice est étudier la dynamique $x' = f(x)$ associé à un champ de gradient.

1. Montrer que les points d'équilibre du système coïncident avec les points critiques de V.
2. Écrire le système linéarisé autour d'un équilibre x_0. En deduire une condition suffisante pour que :
   (a) x_0 soit un équilibre asymptotiquement stable du système.
   (b) x_0 ne soit pas un équilibre stable du système.
3. Montrer que pour toute solution $x(t)$ du système on a l'identité

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -\|\nabla V(x(t))\|^2.$$

4. En deduire :
   (a) si x_0 est un minimum local, alors x_0 est un équilibre stable du système.
   (b) si x_0 est un minimum local isolé, alors x_0 est un équilibre asymptotiquement stable du système.

Exercice 8. (*) Considérons l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_2' = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases} \tag{7}$$

1. Trouver tous les équilibres du système.
2. Montrer que $\bar{x}(t) = (\cos t, \sin t)$ est une solution 2π-périodique de ce système.
3. Pour toute solution $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ déterminer si la quantité $\rho(t)^2 = x_1(t)^2 + x_2(t)^2$ est constante, croissante ou décroissante, selon la valeur initiale $(x_1(0), x_2(0))$.
4. En deduire que toute solution avec $\|x(0)\| < 1$ est définie sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire si $\|x(0)\| > 1$?
5. Écrire le système en coordonnées polaires (ρ, θ).
6. Déterminer explicitement les solutions $(\rho(t), \theta(t))$
7. Tracer l'allure des orbites dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 (Méthode des caractéristiques)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteur complet de flot ϕ_t.

0. Montrer que $D\phi_t(x) \cdot f(x) = f(\phi_t(x))$.

Considérons une application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

1. Montrer que la fonction $u(t,x) = g(\phi_t(x))$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = f(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \tag{8}$$

2. Étudions maintenant l'unicité des solutions de (8). On considère donc une solution $u(t,x)$ de (8).
   (a) Soit F le champ de vecteurs sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ défini par $F(t,x) = (-1, f(x))$. Montrer que, si $y(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ est solution de l'équation différentielle $y'(s) = F(y(s))$, alors $f \circ y$ est une fonction constante.
   (b) Montrer que toute solution maximale de $y' = F(y)$ coupe l'hyperplan $t = 0$.
   (c) En déduire que $f = g$ et conclure sur l'unicité des solutions de (8).
3. Dans le cas $n = 1$, résoudre l'équation aux dérivées partielles du transport

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + a\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0$$

   en fonction de la condition aux limites $u(0,x) = g(x)$.