Feuille TD 4 - Autour du théorème de Cauchy-Lipschitz

1 Fonctions Lipschitziennes

Exercice 1. (*) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $U = I \times \mathbb{R}$. Soit a et b deux fonctions définies et continues sur I, à valeurs réelles. On pose, pour tout $(t, x) \in U$,

$$f(t, x) = a(t)x + b(t).$$

Montrer que f est Localement Lipschitzienne en x, uniformément par rapport à t sur U.

Exercice 2. (*)

Les fonctions suivantes sont-elles Lipschitziennes ou Localement Lipschitziennes en x, uniformément par rapport à t, sur les ouverts proposés ?

(i) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = e^{tx}$.
(ii) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = xe^{t^2}$.
(iii) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = t\sqrt{|x|}$.
(iv) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = \sin(tx^2)$.
(v) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = \sin(tx)$.
(vi) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = \ln(1 + t^2)|x|$.
(vii) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = (x_1^2 + 3x_2 + 1, x_1x_2)$.
(viii) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = (|x_1 + x_2|, \cos(x_2))$.
(ix) $U =]0, 1[\times\mathbb{R}$, $f(t, x) = \frac{\arctan x}{t}$.

Que peut-on en déduire concernant le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \qquad (t_0, x_0) \in U \end{cases}$$

avec f l'une des fonctions étudiées ci-dessus ?

Exercice 3. Montrer que la fonction

$$f(t, x) := \sqrt{|t|}\sin\left(\frac{x}{|t|}\right), \quad \text{si } t \neq 0, \quad f(0, x) = 0,$$

est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, qu'elle est C^1 en x pour tout t fixé mais n'est pas Localement Lipschitzienne en x, uniformément par rapport à t.

2 Équations à variables séparables

Exercice 4. (*) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $U = I \times \mathbb{R}$. Soit $f(t, x) = g(x)h(t)$ avec h une fonction continues et g est une fonction C^1. On pose, pour $(t_0, x_0) \in U$,

$$\begin{cases} x' = f(t, x) = g(x)h(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

On suppose $g(x_0) \neq 0$. Montrer que pour toute solution u définie sur un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 satisfait $g(u(t)) \neq 0$ pour tout $t \in J$ et

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{g(u(s))} ds = \int_{t_0}^{t} h(s)ds$$

En déduire que le changement de variable $\tau = u(s)$ est bien définie dans J et pour tout $t \in J$ on a

$$\int_{x_0}^{u(t)} \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int_{t_0}^{t} h(s)ds$$

3 Solutions maximales

Exercice 5. Pour chacun des problèmes de Cauchy suivants, a-t'on existence et/ou unicité de la solution dans un voisinage de 0 ?

$$(1) \begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (4) \begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 6. (*) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t \in I \mapsto A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est C^1. Montrer que toute solution maximale de l'équation différentielle

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

est globale.

Exercice 7. (*)[Lemme de Gronwall] (a) Soit $f : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur (t_0, t_1). Soit $v : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ continue (L^1_{loc} suffit) telle que

$$f'(t) \leq v(t)f(t), \qquad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Montrer que

$$f(t) \leq f(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s)ds\right), \qquad \forall t \in [t_0, t_1].$$

(b) Soient $C \in \mathbb{R}$, $u, v : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec $v \geq 0$ telles que

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds, \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{1}$$

Montrer que

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^t v(s)ds\right), \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{2}$$

Exercice 8. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ globalement Lipschitz en y (uniformément par rapport à t). Montrer que les solutions maximales de $y' = f(t, y)$ sont globales.

Exercice 9. Soit f un champ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, et y, z définies et dérivables sur un ouvert I de $\mathbb{R}$ et telles que

$$y'(t) < f(t, y(t)), \quad \text{et} \quad z'(t) = f(t, z(t)).$$

On suppose que pour un certain $t_0 \in I$, $y(t_0) < z(t_0)$.

1. Prouver que pour tout $t \in I \cap [t_0, +\infty[$, $y(t) < z(t)$.
2. Application : soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, et telle que $f > 0$. Montrer que la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + f(t, y), \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

n'est pas globale.

Exercice 10. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, et le problème de Cauchy, posé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} y' = (y + 1)(y - 1), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{4}$$

1. Si $y_0 \in]-1, 1[$, montrer que la solution maximale est globale, et converge vers ∓ 1 en $\pm\infty$.
2. Montrer que si $y_0 > 1$, alors l'intervalle d'existence de la solution maximale est borné supérieurement.

Exercice 11. (*)On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^y - 1 \\ y(0) = \alpha \end{cases} \tag{5}$$

(a) On notera $y_\alpha(t)$ la solution maximale de (5) définie sur $I_\alpha =]T_\alpha^-, T_\alpha^+[$.

1. Justifier l'existence et l'unicité de la solution maximale.
2. Quelle est la solution pour $\alpha = 0$?

(b) On suppose que $\alpha > 0$.

1. Montrer que $y_\alpha(t) > 0$ pour tout $t \in I_\alpha$.
2. Montrer que $y_\alpha(t)$ est croissante. En deduire que $y'(t)e^{-y(t)} \geq 1 - e^{-\alpha}$ pour tout $t \in I_\alpha \cap [0, +\infty)$.
3. Montrer que la solution n'est pas globale, i.e. $T_\alpha^+ < +\infty$.

(c) On suppose que $\alpha < 0$.

1. Montrer que $y_\alpha(t) < 0$ pour tout $t \in I_\alpha$.
2. Montrer que $y_\alpha(t)$ est décroissante. En deduire que $\alpha - t \leq y(t) \leq \alpha$ pour tout $t \in I_\alpha \cap [0, +\infty)$.
3. Montrer que la solution est globale, i.e. $I_\alpha = \mathbb{R}$.

(d) Tracer l'allure des solutions

Exercice 12. (*)Soit $a > -1$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \log(1 + y) \\ y(0) = a \end{cases} \tag{6}$$

On notera $y_a(t)$ la solution maximale de (6) définie sur $I_a =]T_a^-, T_a^+[\subset \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$ sur lequel l'équation est définie.
2. Trouver toutes les solutions constantes de (6).
3. Montrer que, pour $a \neq 0$, la solution $y_a(t)$ ne change pas de signe.
4. Montrer que les limites $\ell_a^\pm = \lim_{t \to T_a^\pm} y_a(t)$ existent et les calculer.
5. Determiner $T_a^\pm$ et tracer l'allure des solutions de (6).

Exercice 13. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, et le problème de Cauchy, posé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{7}$$

où $f \in C^1(\mathbb{R})$ avec un nombre finis de points d'annulation $x_1 < \ldots < x_N$.

1. Montrer que si $x_i \leq y_0 \leq x_{i+1}$ alors la solution du problème de Cauchy est globale. Montrer que les limites $\lim_{t \to \pm\infty} y(t)$ existent et les calculer.
2. On suppose que $f(x) > 0$ pour $x > x_N$. Soit $y_0 > x_N$.
   a. Montrer que la solution de (7) est définie sur $] - \infty, T_+[$.
   b. Montrer que $T_+ < \infty$ si et seulement si $1/f$ est intégrable en $+\infty$.
3. Que dire si $f(x) < 0$ pour $x > x_N$? Que dire pour $y_0 < x_1$?

Exercice 14. On considère le problème de Cauchy

$$(1) \begin{cases} y'' = \frac{1}{y} \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que (1) possède une solution maximale φ définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ contenant 0.
2. Montrer que $a = -b$ et que φ est paire.
3. Etablir le tableau de variation de φ. Montrer que si $b \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to b} \varphi$ ou $\lim\limits_{x \to b} \varphi'$ est infinie.
4. Montrer que $]a, b[= \mathbb{R}$.

Exercice 15. On considère le problème de Cauchy suivant.

$$(1) \begin{cases} x' = x(2 - \frac{y'}{y}) \\ y' = 3(x + y) - x' \\ (x(0), y(0)) = (2, -1) \end{cases}$$

1. Peut-on utiliser les théorèmes du cours pour traiter le système (1) ?
2. On suppose qu'il existe une solution (x, y) de classe C^1 au voisinage de $(2, -1)$. On pose $u = xy$ et $v = x + y$. Montrer que (u, v) vérifie un système différentiel linéaire très simple.
3. Trouver une solution de (1).