Feuille TD 3 - Équations différentielles linéaires

1. Systèmes linéaires homogènes à coefficients constants à deux dimensions

Exercice 1. (*) Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} x_1' = a_1 x_1, \\ x_2' = a_2 x_2, \end{cases} \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

1. Trouver explicitement toutes les solution de (1). En déduire que pour tout $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de (1) telle que $x(0) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.
2. Tracer l'allure des solutions dans le plan (x_1, x_2).
3. On s'intéresse maintenant aux solutions de $y' = Ay$ où $A \in M_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Tracer l'allure des trajectoires dans le plan.

Exercice 2. (*)Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, admettant $\lambda = a + ib$ pour valeur propre avec $a, b \in \mathbb{R}$ $b \neq 0$. On appelle $u = x + iy \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, avec $x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^2$.

1. Trouver toutes les valeurs propres et les vecteurs propres de A, et montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Montrer que $y \neq 0$, que $x \neq 0$ et que la famille (x, y) est libre.
2. Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, avec
$$B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{2}$$
3. Calculer e^{tB}. [Indication : Écrire $B = aI + bJ$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$]. En déduire une formule pour e^{tA}.
4. Montrer que les trajectoires solutions de $x' = Ax$ sont des spirales logarithmiques (de la forme $\rho = C\exp(\alpha\theta)$ en coordonnées polaires (ρ, θ) dans une base) ou des ellipses, et tracer leur allure dans le plan.
5. Montrer que, en identifiant $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ avec $(x_1, x_2) \simeq x_1 + ix_2$, l'application linéaire associée à B correspond à l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \lambda z$. En déduire une autre façon de calculer e^{tB}.

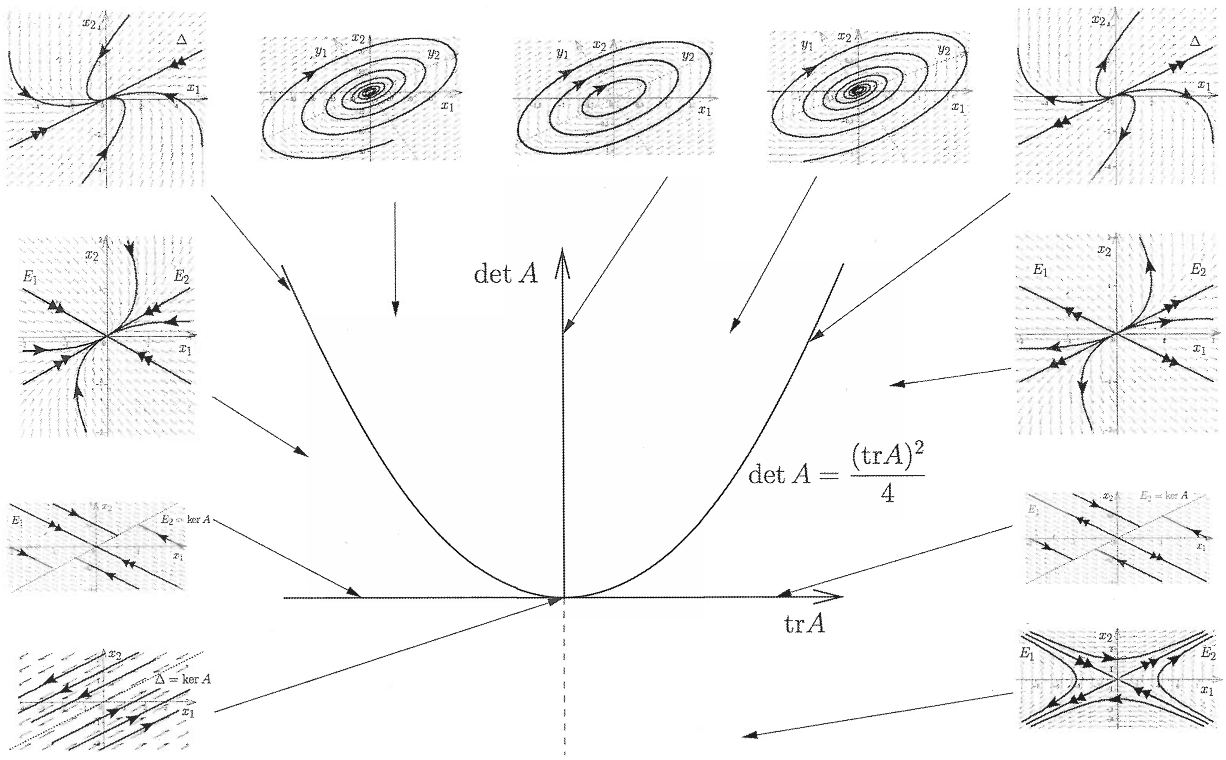
Exercice 3. (*) On s'intéresse aux solutions de $x' = Bx$ où $B \in M_2(\mathbb{R})$ est donnée par

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

1. Calculer e^{tB}.
2. Tracer l'allure des trajectoires dans le plan.
3. On s'intéresse maintenant aux solutions de $y' = Ay$ où $A \in M_2(\mathbb{R})$ est semblable à B. Tracer l'allure des trajectoires dans le plan.

Exercice 4. Soit A une matrice réelle 2×2.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est de la forme
$$P_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$$
2. En déduire les valeurs propres de A en fonctions de $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$.
3. A l'aide de l'exercice précédent, décrire le comportement des solutions de $x' = Ax$ en fonction de $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$. Commenter la figure ci-jointe.



2. Équations et systèmes linéaires homogènes à coefficients variables

Exercice 5. On considère l'équation différentielle définie

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = 0, \tag{4}$$

avec $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues.

1. Écrire l'équation (4) comme un système $x'(t) = A(t)x(t)$ d'ordre 1 en dimension 2.
2. (a) Étant données deux solutions u_1, u_2 de (4), leur wronskien est la fonction $W : t \mapsto \det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix}$. Montrer $W'(t) + P(t)W(t) = 0$. En déduire que le wronskien est soit identiquement nul, soit non-nul et de signe constant.
   (b) Montrer que si u_1 et u_2 sont linéairement dépendantes, alors W est identiquement nul.
   (c) On suppose que u_1 et u_2 sont linéairement indépendantes. On veut montrer que le wronskien n'est pas nul. On suppose que W s'annule en un certain t_0. Construire alors une combinaison linéaire de u_1 et u_2 qui s'annule ainsi que sa dérivée en t_0. En déduire que u_1 et u_2 sont dépendantes.
3. En utilisant le wronskien, démontrer que les points d'annulations de u_1 et u_2 s'alternent, c'est-à-dire u_1 s'annule exactement une fois entre deux zeros consécutifs de u_2, et vice-versa.

Exercice 6. (*) On considère l'équation différentielle définie

$$y^{(n)}(t) + P_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + P_0(t)y(t) = 0, \tag{5}$$

avec $P_0, \ldots, P_{n-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues.

1. Écrire l'équation (5) comme un système $x'(t) = A(t)x(t)$ d'ordre 1 en dimension n.
2. Démontrer que toute solution non identiquement nulle de (5) s'annule au plus un nombre fini de fois dans chaque intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (on pensera à utiliser le théorème de Rolle).

Exercice 7. (*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On s'intéresse à l'équation différentielle scalaire : (E) $x'' + f(t)x = 0$.

1. Ecrire un système différentiel d'ordre 1 équivalent à (E).
2. Etant données deux solutions u_1, u_2 de (E), comment varie leur wronskien $W : t \mapsto \det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix}$?
3. En déduire que la position d'équilibre $x = x' = 0$ ne peut pas être attractive.

3. Équations différentielles et systèmes avec second membre

Exercice 8. (*) Intégrer le système différentiel :

$$\begin{cases} x' & = & tx & + & (1-t^2)y & + & (1-t^2)^2; \\ y' & = & x & - & ty & + & t(1+t^2); \end{cases}$$

Pour cela, on se propose de vérifier que : $t \to (t, 1)$ et $t \to (1+t^2, t)$ sont deux solutions indépendantes du système linéaire homogène associé et d'utiliser la méthode de variation des constantes.

Exercice 9. On considère l'équation différentielle définie

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = g(t), \tag{6}$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

1. Écrire l'équation (6) comme un système $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ d'ordre 1 en dimension 2.
2. Remarquer que $A(t)$ est indépendante du temps. Calculer la matrice fondamentale $R(t, s)$.
3. Utiliser la formule générale
$$x(t) = R(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)ds$$
pour écrire la solution générale de (6), où g reste inconnue.
4. Expliciter dans le cas $g(t) = e^t$. Comparer avec la méthode du TD1.

3. Systemes linéaires en dimension supérieure

Exercice 10. On considère le système autonome dans $\mathbb{R}^n$

$$x' = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

1. Montrer que si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre réelle λ, alors $x(t) = e^{\lambda t}x_0$ est une solution de (7) telle que $x(0) = x_0$.
2. Montrer que si $z_0 := x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre complexe $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, la fonction réelle
$$x(t) = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)x_0 - \sin(\beta t)y_0\right)$$
est une solution de (7) telle que $x(0) = x_0$. [*Indication : montrer que $x(t) = \Re z(t)$, où $z(t) = e^{\lambda t}z_0 \in \mathbb{C}^n$*]

Exercice 11. On s'intéresse au système différentiel :

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & x & - & y; \\ y' & = & y & - & 4z; \\ z' & = & -x & + & 4z. \end{array}$$

1. Ecrire ce système sous la forme $X' = A.X$.
2. Trouver les valeurs propres de A et déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de l'application linéaire représentée par A s'écrit dans la nouvelle base :
$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$
3. En déduire les solutions du système.

Exercice 12. On considère le système autonome dans $\mathbb{R}^n$

$$x' = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

(a) On suppose que A est antisymétrique, i.e., $A^T = -A$.

1. Montrer que tout valeur propre de A est imaginaire pure.
2. Montrer que toute solution $x(t)$ de (8) satisfait $\|x(t)\| = \|x(0)\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) On suppose que A est conjuguée a une matrice antisymétrique.

1. Montrer que toute solution $x(t)$ de (8) est bornée.
2. Que peut-on dire sur les valeurs propres de A ?