Feuille TD 2 - Exemples de recherches de solutions maximales

Exercice 1. (*) On considère l'équation différentielle (E) $x + yy' = 0$.

1. Montrer que si (I, φ) est une solution de (E), l'application $x \in I \mapsto x^2 + \varphi^2(x)$ est constante.
2. En déduire les solutions maximales de (E).
3. Existe-t-il une solution de (E) qui s'annule ? Existe-t-il pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ une solution de condition initiale $y(x_0) = y_0$?
4. Représenter sur un même dessin quelques solutions de (E).

Exercice 2. (*) Pour chacun des problèmes de Cauchy suivants, déterminer toutes les solutions maximales.

$$(1) \begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (4) \begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercices d'entraînement

Exercice 3.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 2y + t$. Représenter graphiquement les solutions, en se limitant au demi-plan $2y > -t$.
2. Même question pour l'équation $y' = -2y - t$, en se limitant cette fois au demi-plan $2y < -t$.
3. On considère maintenant l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = |2y + t|.$$

Montrer que par tout point (t, y) du plan, il passe une solution maximale et une seule de l'équation (E), et que cette solution est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 4. On considère le problème de Cauchy suivant.

$$(1) \begin{cases} x' = x(2 - \frac{y'}{y}) \\ y' = 3(x + y) - x' \\ (x(0), y(0)) = (2, -1) \end{cases}$$

1. On suppose qu'il existe une solution (x, y) de classe C^1 au voisinage de $(2, -1)$. On pose $u = xy$ et $v = x + y$. Montrer que (u, v) vérifie un système différentiel linéaire très simple.
2. Trouver une solution maximale de (1).

Exercice 5. Soit l'équation

$$\text{(E)} \quad x'(t) = (t + 1) \cos x(t).$$

1. Trouver les solutions constantes de (E). On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des réels c tels que $t \mapsto c$ est une solution constante de (E).
2. Soit (I, x) une solution maximale de (E) de condition initiale $x(t_0) = x_0$ avec $x_0 \notin \mathcal{C}$.
   (a) Montrer que sur son ensemble de définition que l'on déterminera, la fonction $t \mapsto \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)$ est une primitive de $\frac{1}{\cos}$.
   (b) Soit $J = \{t \in T; x(t) \notin \mathcal{C}\}$. Justifier que J est une partie ouverte de I contenant t_0. On notera J_0 le plus grand sous-intervalle de J qui contient t_0.
   (c) Donner une relation liant $x(t)$ et t sur J_0 (ne faisant plus intervenir la dérivée de x mais avec une constante d'intégration).
   (d) En déduire que $J_0 = J = I$ [1].
3. En utilisant la relation trouvée en 2c, montrer que seules les solutions constantes sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz, que vous verrez plus tard, permet de déduire ceci très rapidemant de la question 1

Exercice 6. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, et le problème de Cauchy, posé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} y' = (y+1)(y-1), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

1. Pour quelles valeurs de y_0 trouve-t-on une solution constante ?
2. Soit (I, φ) une solution qui ne vaut ± 1 en aucun point. Déterminer une relation liant $y(t)$ et t au voisinage de 0 (On sera amené à décomposer la fraction $\frac{1}{(X+1)(X-1)}$ en éléments simples).
3. (a) On suppose que $y_0 \neq \pm 1$. En utilisant la question 2, montrer qu'une solution du problème de Cauchy ne prend la valeur ± 1 en aucun point [2].

   (b) En déduire qu'il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy considéré, en donner une formule explicite et déterminer pour quels y_0 elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
4. Représenter quelques solutions maximales sur un même dessin.
5. Montrer que si (I, φ) est une solution maximale, alors $t \mapsto -\varphi(-t)$ définit aussi une solution maximale. Reliez ceci à la représentation graphique des solutions faire précédemment.

2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz, que vous verrez plus tard, permet de déduire ceci très rapidemant de la question 1